



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA**

Tesis de Doctorado en Ingeniería

**VIBRACIONES DE VIGAS CONSTITUIDAS POR  
MATERIALES FUNCIONALMENTE GRADUADOS**

Gonzalo José Gilardi

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2019

## PREFACIO

---

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras.

La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Área de Estabilidad, dependiente del Departamento de Ingeniería, y en el Instituto de Ingeniería-II-UNS (UNS-CIC); durante el período comprendido entre agosto de 2014 y marzo de 2019.

La investigación fue desarrollada bajo la dirección de la Dra. Ing. Diana Virginia Bambill, Profesora Titular del Área de Estabilidad, en el Departamento Ingeniería de la UNS, y del Dr. Ing. Carlos Adolfo Rossit, Profesor Titular del Área de Estabilidad, en el Departamento de Ingeniería de la UNS, ambos en carácter de directores.

Ing. Gonzalo José Gilardi



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
Secretaría General de Postgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el ...../...../....., mereciendo la calificación de ..... (.....) .

Área de Estabilidad - Departamento de Ingeniería

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR (UNS)

## AGRADECIMIENTOS

---

En primer lugar, quiero agradecer a mis directores, la Dra. Diana V. Bambill y el Dr. Carlos A. Rossit, por abrirme las puertas a la investigación y brindarme su valioso tiempo en la dirección de esta tesis. Debo reconocer su papel de mentores, su dedicación, su predisposición, su compromiso y la comodidad que me transmitieron para trabajar en el transcurso de estos años.

A la Universidad Nacional del Sur (UNS) y en especial, al Departamento de Ingeniería, por cederme su espacio para desarrollar mi carrera de grado y mis estudios de postgrado.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por brindarme la ayuda económica para realizar un postgrado y a la Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la provincia de Bs. As., por financiar los proyectos del grupo de investigación.

Al Dr. Daniel H. Felix por su apoyo, y principalmente por su honestidad y dedicación desinteresada en transmitirme sus conocimientos de programación.

Al Mg. Alejandro R. Ratazzi y al Dr. Diego G. Rossit, por su compañerismo y su excelente predisposición a ayudarme en lo que necesitara.

Al Mg. Santiago Maiz, por su contribución de material bibliográfico para iniciar los primeros pasos de esta tesis y por su predisposición a responder inquietudes a fin.

A mi querida novia Vanesa por su cariño, su paciencia y su compañía durante estos años.

A mi familia y a la de mi novia, por preocuparse y darme siempre aliento para seguir adelante.

A mis amigos y colegas de las Áreas de Estabilidad, Hormigón, Hidráulica, Organización Industrial y Física.

## RESUMEN

---

La presente tesis trata sobre la novedosa aplicación de materiales funcionalmente graduados (-FGM- *Functionally Graded Materials*) en el diseño de estructuras tipo viga.

Como es sabido, los estudios de rigidización dinámica, se llevan a cabo para evitar resonancias y/o reducir tensiones dinámicas. La forma tradicional que se emplea para optimizar la rigidez de la viga, es variando su sección transversal; ya sea reduciéndola de forma discontinua (*multi-steps beams* tal como se las conoce en inglés), ahusada (*tapered beams* tal como se las denomina en inglés) o bien empleando combinaciones de ambas.

Surge la originalidad, desde el punto de vista de la optimización dinámica, de adicionar una nueva solución al problema de la rigidización. La misma consiste en hacer variar las propiedades de estos modernos materiales en la dirección axial de las vigas (-AFGM-*Axially Funtionally Graded Materials*).

El problema de vibraciones libres para las vigas AFG, se estudia implementando las teorías clásicas de Bernoulli-Euler y de Timoshenko, mediante tres enfoques aproximados; el método energético de Rayleigh-Ritz, el método de cuadratura diferencial generalizada (GDQM, por sus siglas en inglés) y el método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés).

Los resultados obtenidos se comparan con valores disponibles en la literatura. La muy buena correlación de los mismos, permite dar certezas de que el método de Rayleigh-Ritz, GDQM y FEM, son herramientas de gran precisión y eficiencia para la resolución de esta clase de problemas.

Los casos de vigas propuestos se modelan con condiciones de bordes clásicas y con extremos elásticamente restringidos. Para la modelación numérica de los problemas, se implementa el *software Wolfram Mathematica 9.0*.

En el estudio se tratan leyes de distribución del tipo axial asimétrica y axial simétrica; para varias composiciones y distintos materiales AFG. En particular, se da especial énfasis al material compuesto por alúmina (Alum) y acero (Ac), ya que desde el punto de vista ingenieril presenta propiedades atractivas para la rigidización dinámica de vigas.

Se analiza el efecto dinámico que tiene adosar una o varias masas a la viga. Evidenciando que su presencia disminuye, en todos los casos, a los coeficientes de frecuencias naturales de la viga sin masa adosada. Y además, constituye un factor importante, desde el punto de vista del diseño, en la elección de la composición del material AFG a implementar.



Para las vigas AFG cantiléver con características asimétricas del material, la composición a) Ac-Alum rigidiza más que la composición b) Alum-Ac, cuando el exponente  $n$  (de las leyes de variación) es menor a 1, exista o no masa adosada en el extremo libre. En cambio, para  $n > 1$  la composición b) es quien optimiza la solución. El caso  $n = 1$  es particular, ya que la composición a) rigidiza levemente más que b) cuando la viga no tiene masa adosada. Pero, cuando se adosa la masa, se aprecia que el coeficiente de frecuencia fundamental aumenta más para la composición b).

Para vigas AFG con características simétricas, se evidencia que la composición c) Ac-Alum-Ac optimiza la rigidización haya o no masa adosada, frente a la composición d) Alum-Ac-Alum.

## ABSTRACT

---

This thesis deals with the novel application of functionally graduated materials (FGM) in the design of beams.

It is known that dynamic stiffening studies are carried out to avoid resonances and/or reduce dynamic stresses. The traditional method to optimize the rigidity of the beam consists in variations of its cross section; either by reducing it in a discontinuous way (multi-steps beams), in a tapered way (tapered beams) or by using a combination of both.

In this Thesis, from the point of view of dynamic optimization, an original solution of the problem of stiffening is proposed. This novel solution consists in varying the properties of these modern materials in the axial direction of the beams (AFGM).

With this aim, the problem of free vibrations for the AFG beams is studied through the classical theories of Bernoulli-Euler and Timoshenko, using three approximation approaches: the Rayleigh-Ritz energy method, the generalized differential quadrature method (GDQM) and the finite element method (FEM).

The obtained results are compared with those available in the related literature. The very good correlation of these, allows to give certainty that the Rayleigh-Ritz method, GDQM and FEM, are tools of great precision and efficiency for the resolution of this class of problems.

The cases of proposed beams are modeled with classic edge conditions and with elastically restrained edge supports. For the numerical modeling of the problems, Wolfram Mathematica 9.0 software is implemented.

The used distribution laws are the axial asymmetric and axial symmetric and were applied for various compositions and different AFG materials; with a particular emphasis on the material composed of alumina (Alum) and steel (St), since it has attractive properties for the dynamic stiffening of beams from the engineering point of view.

The dynamic effect of attaching one or several masses to the beam is analyzed. It is shown that their presence decreases, in all cases, the natural frequency coefficients of the beam that do not have attached mass. In addition, it constitutes an important factor, from the point of view of the design, in the choice of the composition of the AFG material to be implemented.

In cantilever AFG beams with asymmetric characteristics of the material, the composition a) St-Alum stiffens more than the composition b) Alum-St, when the exponent  $n$  (of the laws of variation) is less than 1, whether or not there is an attached mass at the free end.

On the other hand, for the composition b) it is the one that optimizes the solution. The case

$n = 1$  is particular, since the composition a) stiffens slightly more than b) when the beam has not attached mass. But, when the mass is attached, the fundamental frequency coefficient increases more for the composition b).

In AFG beams with symmetrical characteristics, it is evident that the composition c) St-Alum-St optimizes the stiffening whether or not there is an attached mass, compared to the composition d) Alum-St-Alum.

## LISTADO DE PUBLICACIONES

---

La investigación desarrollada para la realización de la presente tesis dio lugar a la publicación de los siguientes trabajos:

### CAPÍTULO DE LIBRO:

Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Free vibrations of tapered AFG Timoshenko beams. (*Chapter 1; 1–37*). Yuen, J. (Editor), *Computational Mechanics (CM), Applications and developments*. New York Nova Science Publishers, 2018.

### ARTÍCULOS EN REVISTAS INDEXADAS:

Rossit, C.A., Bambill, D.V. y Gilardi, G.J., Free vibrations of AFG cantilever tapered beams carrying attached masses. *Structural Engineering and Mechanics*, 61(5):685–691, 2017.

Rossit, C.A., Bambill, D.V. y Gilardi G.J., Timoshenko theory effect on the vibration of axially functionally graded cantilever beams carrying concentrated masses. *Structural Engineering and Mechanics*, 66(6):703–711, 2018.

### CONGRESOS:

Gilardi, G.J., Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Free vibrations of an axially functionally graded beam with a concentrated mass. *1st. Pan-American Congress on Computational Mechanics -PANACM 2015-*, 410-421. CIMNE, 2015.

Gilardi, G.J., Díaz Valdez, I.H., Bambill, D.V., Rossit, C.A. y Romero, F., Comportamiento dinámico de vigas constituidas por material funcionalmente graduado. *V CAIM*, (I-001:11 págs.). Publicado en las Actas del Congreso, 2016.

Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Vibraciones de vigas construidas con material funcionalmente graduado que soportan masas adosadas. *Mecánica Computacional*, XXXIV: 529–544, 2016.

Gilardi, G.J., Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Diversos enfoques para el estudio del comportamiento dinámico de vigas Timoshenko AFG. *Mecánica Computacional*, XXXV: 2165–2185, 2017.

Gilardi, G.J., Bambill D.V. y Rossit, C.A., Rigidización dinámica de vigas cantiléver con materiales funcionalmente graduados y sección variable. *Mecánica Computacional*, XXXVI: 215–224, 2018.

Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Comportamiento dinámico de vigas Timoshenko AFG con vinculación elástica. *Mecánica Computacional*, XXXVI: 205–214, 2018.

# ÍNDICE

---

PREFACIO	Pág. <i>i</i>
AGRADECIMIENTOS	<i>ii</i>
RESUMEN	<i>iii</i>
ABSTRACT	<i>v</i>
LISTADO DE PUBLICACIONES	<i>vii</i>

## CAPÍTULO 1

### CONSIDERACIONES GENERALES

1.1 INTRODUCCIÓN	2
1.2 VIBRACIONES	3
1.3 ELEMENTO ESTRUCTURAL VIGA	5
1.3.1 Concepto y aplicación	5
1.3.2 Teorías de vigas	7
1.3.2.1 Teoría de Bernoulli-Euler	7
1.3.2.2 Teoría de Timoshenko	11
1.4 MATERIALES FUNCIONALMENTE GRADUADOS	14
1.4.1 Evolución de los materiales	14
1.4.2 Evolución de los materiales Aplicación del FGM en vigas	16
1.5 REFERENCIAS	19

## CAPÍTULO 2

### VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG EN VOLADIZO CON UNA MASA ADOSADA EN EL EXTREMO LIBRE

2.1 MÉTODOS APROXIMADOS	27
2.2 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ	27
2.2.1 Introducción	27
2.3 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA	28
2.3.1 Modelo	28
2.3.2 Propiedades del material (AFG)	29
2.3.3 Procedimiento analítico	30
2.4 RESULTADOS NUMÉRICOS	33
2.4.1 Análisis de convergencia	33
2.4.2 Comparación con la literatura	35
2.4.2.1 Viga cantiléver AFG	35
2.4.2.2 Viga cantiléver homogénea con masa	36
2.4.3 Casos propuestos	36
2.4.3.1 Elección del material AFG	37
2.4.3.2 Patrón de comparación	37
2.4.3.3 Rigidización dinámica mediante material	38

2.4.3.4 Rigidización dinámica mediante geometría	41
2.4.3.5 Rigidización con material y geometría	42
2.5 REFERENCIAS	43

### **CAPÍTULO 3**

#### **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG EN VOLADIZO CON MÁS DE UNA MASA ADOSADA**

3.1 INTRODUCCIÓN	46
3.2 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA	46
3.3 RESULTADOS NUMÉRICOS	47
3.3.1 Comparación con la literatura	47
3.3.2 Casos propuestos	49
3.3.2.1 Variación de la sección transversal	50
3.3.2.1.a Variación lineal	50
3.3.2.1.b Variación cuadrática	50
3.3.2.2 Implementación del material AFG	51
3.3.2.2.a Variación lineal de las propiedades del material AFG	51
3.3.2.2.b Variación cuadrática de las propiedades del material AFG	52
3.3.2.3 Variación de la sección e implementación del material AFG	53
3.4 REFERENCIAS	54

### **CAPÍTULO 4**

#### **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG CANTILEVÉR CON UNA MASA ADOSADA**

4.1 MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADA (GDQM)	56
4.1.1 Introducción	56
4.1.2 Esencia del método	56
4.1.2.1 Mallado	57
4.1.2.2 Reglas de cuadratura y coeficientes de peso	58
4.1.2.3 Sistema lineal análogo de cuadratura	58
4.1.2.4 Resolver el sistema lineal de ecuaciones resultantes	59
4.2 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA	60
4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS	61
4.3.1 Casos de comparación	62
4.3.1.1 Viga cantiléver sin masa	62
4.3.1.2 Viga cantiléver con masa	65
4.3.1.3 Viga cantiléver AFG Ahusada	67
4.3.2 Casos propuestos	68
4.3.2.1 Viga cantiléver AFG de sección constante	68
4.3.2.2 Viga cantiléver AFG Ahusada sin masa	69
4.3.2.3 Viga cantiléver AFG Ahusada con masa	70
4.4 REFERENCIAS	72

## **CAPÍTULO 5**

### **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG DE DOS TRAMOS EN VOLADIZO QUE SOPORTAN UNA MASA ADOSADA EN EL EXTREMO LIBRE**

5.1 INTRODUCCIÓN	76
5.2 CONSIDERACIONES GENERALES DEL MODELO DE ANÁLISIS	76
5.3 CARACTERÍSTICAS DE LA GEOMETRÍA Y DE LA GRADACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL EN LA VIGA	77
5.4 MÉTODOS APROXIMADOS	77
5.4.1 Método de Rayleigh-Ritz	77
5.4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)	79
5.5 RESULTADOS NUMÉRICOS	82
5.5.1 Casos de comparación	82
5.5.1.1 Viga homogénea en voladizo escalonada, con y sin masa:	82
5.5.2 Casos propuestos	84
5.5.2.1 Vigas escalonadas de sección constante	85
5.5.2.2 Vigas de sección variable en el primer tramo y constante en el segundo	86
5.5.2.3 Vigas escalonadas de sección variable en ambos tramos	90
5.5.2.3.a Vigas escalonadas de ancho constante	90
5.5.2.3.b Vigas escalonadas de ancho y altura variables	92
5.6 REFERENCIAS	93

## **CAPÍTULO 6**

### **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG CON DISTINTAS CONDICIONES DE BORDE CLÁSICAS**

6.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (FEM)	95
6.1.1 Introducción	95
6.1.2 Esencia del método	96
6.2 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA	97
6.2.1 Modelo	97
6.2.2 Desarrollo del elemento	97
6.3 RESULTADOS NUMÉRICOS	104
6.3.1 Casos de comparación	104
6.3.1.1 Viga cantiléver sin masa	104
6.3.1.2 Viga cantiléver AFG ahusada sin masa	105
6.3.2 Casos propuestos	106
6.3.2.1 Viga AFG Empotrada-Apoyada (E-A)	108
6.3.2.2 Viga AFG Simplemente Apoyada (A-A)	111
6.3.2.3 Viga AFG Biempotrada (E-E)	113
6.4 REFERENCIAS	115

## **CAPÍTULO 7**

### **EFFECTO DE LA TEORÍA DE VIGAS DE TIMOSHENKO SOBRE LAS VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG CANTILÉVER CON MASAS CONCENTRADAS ADOSADAS**

7.1 INTRODUCCIÓN	118
7.2 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA	118
7.3 RESULTADOS NUMÉRICOS	121
7.3.1 Casos de comparación	121
7.3.1.1 Viga cantiléver AFG ahusada sin masa adosada	122
7.3.1.2 Viga cantiléver ahusada homogénea con masa adosada	122
7.3.1.3 Viga cantiléver ahusada homogénea con $N_m$ masas adosadas	123
7.3.2 Casos propuestos	125
7.3.2.1 Viga cantiléver de sección constante	126
7.3.2.2 Viga cantiléver con altura variando linealmente	128
7.3.2.3 Viga cantiléver con altura variando cuadráticamente	129
7.4 REFERENCIAS	133

## **CAPÍTULO 8**

### **DIVERSOS ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS TIMOSHENKO AFG**

8.1 INTRODUCCIÓN	136
8.2 GENERALIDADES DEL MODELO DE ANÁLISIS	136
8.3 LEY DE VARIACIÓN PARA LAS CARACTERÍSTICAS GEOMETRÍAS Y PROPIEDADES DEL MATERIAL	136
8.4 MÉTODOS APROXIMADOS	137
8.4.1 Método de Rayleigh-Ritz	137
8.4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)	139
8.4.3 Método de Elementos Finitos (FEM)	146
8.5 RESULTADOS NUMÉRICOS	152
8.5.1 Estudio de convergencia	152
8.5.1.1 Viga cantiléver sin masa	153
8.5.2 Casos de comparación	159
8.5.2.1 Viga en voladizo de material homogéneo	159
8.5.2.2 Viga AFG con distintas C.B. clásicas	160
8.5.3 Casos propuestos	161
8.5.3.1 Viga AFG en voladizo de un tramo con masa	162
8.5.3.2 Viga en voladizo de dos tramos con masa en el extremo libre	163
8.5.3.3 Vigas AFG con ley simétrica de dos tramos y con masa adosada en el centro	164
8.5.3.3.a Viga AFG Simplemente Apoyada de dos tramos con y sin masa en el centro	165
8.5.3.3.b Viga AFG Biempotrada de dos tramos con y sin masa en el centro	166
8.6 REFERENCIAS	168



## **CAPÍTULO 9**

### **COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS TIMOSHENKO AFG CON VINCULACIÓN ELÁSTICA**

9.1 INTRODUCCIÓN	171
9.2 GENERALIDADES DEL MODELO DE ANÁLISIS	172
9.3 LEY DE VARIACIÓN PARA LAS CARACTERÍSTICAS GEOMETRÍAS Y PROPIEDADES DEL MATERIAL	173
9.4 MÉTODOS APROXIMADOS	173
9.4.1 Método de Rayleigh-Ritz	173
9.4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)	175
9.4.3 Método de Elementos Finitos (FEM)	176
9.5 RESULTADOS NUMÉRICOS	177
9.5.1 Verificación del modelo	177
9.5.2 Casos Propuestos	180
9.5.2.1 Modelo de comparación con condiciones de borde especiales	180
9.5.2.2 Vigas con ley de distribución asimétrica	180
9.5.2.2.a Vigas homogéneas simplemente apoyadas (A-A)	183
9.5.2.2.b Vigas AFG simplemente apoyadas (A-A)	184
9.5.2.2.c Vigas homogéneas y AFG con condiciones de borde generales	185
9.6 REFERENCIAS	189

## **CAPÍTULO 10**

### **RIGIDIZACIÓN DINÁMICA DE VIGAS CANTILÉVER CON MATERIALES FUNCIONALMENTE GRADUADOS**

10.1 INTRODUCCIÓN	192
10.2 GENERALIDADES DEL MODELO DE ANÁLISIS	193
10.3 MÉTODOS APROXIMADOS	193
10.4 RESULTADOS NUMÉRICOS	194
10.4.1 Casos de comparación	194
10.4.1.1 Viga de material homogéneo en voladizo de un tramo	194
10.4.1.2 Viga AFG en voladizo	194
10.4.2 Casos propuestos	195
10.4.2.1 Viga en voladizo escalonada	195
10.4.2.2 Viga en voladizo ahusada de un tramo	206
10.5 REFERENCIAS	215

## **CAPÍTULO 11**

### **CONCLUSIONES**

11.1 CONCLUSIONES GENERALES	218
11.2 CONCLUSIONES DE LOS RESULTADOS	218
11.3 CONCLUSIONES SOBRE LOS MÉTODOS APROXIMADOS	221
11.3.1 Método Rayleigh-Ritz	221
11.3.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada	222

11.3.3 Método de Elementos Finitos	223
11.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	224
11.5 REFERENCIAS	225

## ANEXOS

ANEXO 1	227
A1 VIBRACIÓN TRANSVERSAL LIBRE DE VIGAS AFG	227
A1.1 Vigas AFG Bernoulli-Euler	227
A.1.2 Vigas AFG Timoshenko	228
ANEXO 2	230
A2 ANÁLISIS DE CONVERGENCIA PARA EL MÉTODO DE RAYLEIGH- RITZ	230

# **CAPÍTULO 1**

## **CONSIDERACIONES GENERALES**

## 1.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de vibraciones de elementos estructurales o de cualquier sistema constituye un área extremadamente importante para la ingeniería, debido a la amplia variedad de aplicaciones en las que se encuentran involucrados. Las vigas son, probablemente, el componente más difundido en la generalidad de las estructuras resistentes; y particularmente, cuando se encuentran en entornos vibratorios adquiere esencial importancia el conocimiento de sus parámetros dinámicos. Desde el punto de vista del diseño, esto permite predecir determinados comportamientos del elemento que sirven para dar una respuesta ingenieril ante las cargas dinámicas que se encuentra sometido; ya sea para prevenir su daño parcial o total, o bien evitar el colapso de la estructura de la que forma parte.

En lo que respecta a la presente tesis, el estudio se orienta a la resolución de problemas dinámicos de elementos lineales (vigas), constituidos por materiales con función gradiente (Functionally Graded Materials -FGM-), es decir, por materiales avanzados, compuestos y cuyas propiedades varían gradualmente en una o varias direcciones. En particular, se pone especial énfasis en analizar las vibraciones transversales libres de vigas, en las que las propiedades del material constituyente varían axialmente en forma gradual (Axially Functionally Graded -AFG-).

La tesis se subdivide en 11 capítulos, de los cuales el Capítulo 1 es el que presenta los conceptos generales necesarios para entender la problemática a tratar. Luego, se distinguen 2 grandes partes, de acuerdo a la teoría de vigas que se implementa para resolver el problema de la viga vibrante. Del Capítulo 2 al 6 se estudia el comportamiento dinámico de vigas de acuerdo a la teoría de Bernoulli-Euler y del Capítulo 7 al 10 respecto a la teoría de Timoshenko. Finalmente, en el Capítulo 11 se presentan las conclusiones correspondientes al desarrollo.

En el Capítulo 2 se introduce el método aproximado de Rayleigh-Ritz, para analizar el comportamiento dinámico de vigas AFG Bernoulli-Euler en voladizo y con una masa puntual adosada en el extremo libre. A continuación, en el Capítulo 3 se hace una extensión al modelo anterior, mediante la incorporación de más masas, de diferentes magnitudes y en posiciones arbitrarias. Las soluciones se obtienen mediante el método energético de Rayleigh-Ritz.

En el Capítulo 4, se introduce el método de cuadratura diferencial generalizada (GDQM, por sus siglas en inglés) para estudiar el problema dinámico propuesto en el Capítulo 2 y así poder contrastar los resultados obtenidos (generados) con los que brinda el método de Rayleigh-Ritz. En el Capítulo 5, se plantea considerar distintos tipos de singularidades, como el cambio de sección transversal en escalón, la variación del material por tramo, etc.; mediante

la discretización del dominio de la viga en dos tramos. Para el estudio se implementan el método de Rayleigh-Ritz y GDQM, ambos en una forma más generalizada. En el Capítulo 6, se introduce el método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés), para analizar el problema de la viga AFG vibrante. Se contrastan los resultados obtenidos por medio de los 2 métodos, citados precedentemente, para la viga AFG Bernoulli-Euler en voladizo de un tramo y sin masa. Además, se resuelven distintos casos de vigas AFG (para los 3 métodos) con diferentes condiciones de borde clásicas.

En el Capítulo 7, se estudia la vibración libre para el modelo de viga presentado en el Capítulo 3, pero ahora mediante la teoría de Timoshenko. Los valores de los coeficientes de frecuencia, se obtienen de implementar el método de Rayleigh-Ritz en el análisis, adaptado para esta teoría. En el Capítulo 8, se analizan las vibraciones libres de vigas AFG Timoshenko de dos tramos y que pueden llevar adosada una masa puntual en la continuidad de los mismos. Los coeficientes de frecuencia se obtienen de implementar los 3 métodos citados, para distintas condiciones de bordes clásicas, con sus correspondientes modificaciones debido al cambio de teoría de viga.

En el Capítulo 9, se generaliza el modelo de viga AFG presentado en el Capítulo 8, considerando a los extremos vinculados elásticamente mediante resortes traslacionales y rotacionales. Por su parte, en el Capítulo 10, se analiza la rigidización dinámica de vigas AFG en voladizo sin masa adosada, mediante la remoción de material. Es decir, variando la sección transversal de la viga en forma escalonada y ahusada. Para el análisis se implementan GDQM y FEM en ambos casos, mientras que Rayleigh-Ritz se implementa únicamente cuando la sección transversal es ahusada.

## **1.2 VIBRACIONES**

La vibración puede definirse, desde un punto de vista mecánico y estructural, como el movimiento oscilatorio o repetitivo de un cuerpo alrededor de su posición de equilibrio. Las vibraciones se caracterizan por dos parámetros: la frecuencia, que es el número de veces que se produce una oscilación en una unidad de tiempo, es decir, el número de ciclos completos por segundo (se mide en Hertzios (Hz)); y la amplitud, que es la magnitud que define la intensidad de la vibración, y se mide en unidades de longitud (metros) ([White, 2010](#)).

El fenómeno de la vibración implica un intercambio alterno de energía potencial a energía cinética y de energía cinética a energía potencial. Por lo tanto, cualquier sistema de vibración debe tener un componente que almacene energía potencial (elementos de resorte o elásticos) y un componente que almacene energía cinética (elementos de masa o de inercia). Por lo tanto,

el elemento elástico almacena energía potencial y se la entrega al elemento de inercia como energía cinética, y viceversa, en cada ciclo de movimiento (Rao, 2012). Esto se puede explicar fácilmente, analizando el movimiento de una masa sobre una superficie lisa (sistema masa-resorte), tal como se muestra en la Figura. 1.1.

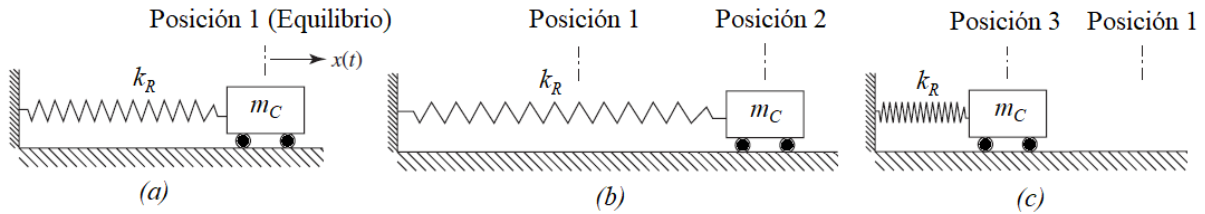


Figura 1.1: Movimiento vibratorio de un sistema masa-resorte: (a) sistema en equilibrio (resorte no deformado); (b) sistema en posición 2 (resorte estirado); (c) Sistema en posición 3 (resorte comprimido).

Se supone una masa  $m_C$  conectada a un resorte lineal (de constante elástica  $k_R$ ) en equilibrio o reposo en la posición 1. La masa  $m_C$  se desplaza inicialmente hacia la derecha hasta la posición 2 y se libera con velocidad cero. En la posición 2, el resorte está en la condición máximo alargamiento, por lo tanto, su energía de deformación (potencial) es máxima y la energía cinética de la masa es cero, ya que la velocidad inicial es nula. Debido a la tendencia del resorte a volver a su condición inicial (sin estirar), existe una fuerza que hace que la masa  $m_C$  se mueva hacia la izquierda. La velocidad de la masa aumenta gradualmente a medida que se mueve desde la posición 2 a la posición 1. En la posición 1, la energía potencial del resorte es cero porque su deformación es nula. Sin embargo, la energía cinética y, por lo tanto, la velocidad de la masa son máximas allí, debido a la conservación de la energía. Luego, la masa continúa moviéndose hacia la izquierda, desde la posición 1, pero ahora contra la fuerza de resistencia que el resorte impone frente a la compresión. Por lo cual, su velocidad disminuye gradualmente hasta anularse en la posición 3, donde la energía cinética de la masa es cero y la energía potencial del resorte es máxima (debido a la compresión). Nuevamente, debido a que el resorte tiende a regresar a su condición descomprimida, existe una fuerza que hace que la masa  $m_C$  se mueva hacia la derecha desde la posición 3. La velocidad de la masa aumenta gradualmente a medida que se mueve desde la posición 3 a la posición 1; lugar donde toda la energía potencial del resorte se transforma en energía cinética, y la masa adquiere su velocidad máxima. Por lo tanto, la masa continúa moviéndose hacia la derecha contra el aumento de la resistencia del resorte hasta que alcanza la posición 2 con velocidad cero. Esto completa un ciclo de movimiento de la masa, y el proceso se repite indefinidamente. De esta manera, la masa tiene un movimiento oscilatorio (Beards, 1966; Rao, 2007).

En la presente tesis se estudian las “vibraciones transversales libres de vigas AFG”, por lo cual, antes de abordar el problema dinámico en esencia, resulta necesario brindar una idea general de su significado conceptual.

Vibración libre es a aquella en la cual un sistema vibra de forma natural sin que exista un aporte de energía durante el movimiento. En el caso de los elementos estructurales, se dice que vibran de acuerdo a sus frecuencias naturales. El movimiento oscilatorio comienza por una perturbación inicial instantánea que altera la posición original de reposo del sistema (viga), ya sea en forma de desplazamiento y/o velocidad (esto equivale a introducir una pequeña cantidad de energía potencial y/o cinética al sistema).

Durante la vibración libre, existe un intercambio de energía potencial y cinética. Si el sistema es conservativo, la suma de estas energías es constante en cualquier momento. Por lo cual, el sistema continuará vibrando indefinidamente, al menos en teoría. Pero en la práctica, este deja de ser conservativo, dado a que siempre existe una cierta fricción interna o amortiguación debida al medio circundante (por ejemplo, el aire), que provoca la pérdida de algo de energía durante el movimiento. En consecuencia, la energía total del sistema disminuye de manera continua hasta anularse, en cuyo punto el movimiento se detiene. Si el sistema recibe sólo una excitación inicial, el movimiento oscilatorio resultante se detiene para todos los sistemas prácticos y, por lo tanto, la excitación inicial se llama excitación transitoria y el movimiento resultante se llama movimiento transitorio (Rao, 2007).

El hecho de considerar que la vibración sea transversal, indica que el movimiento se desarrolla en la dirección perpendicular ( $\bar{y}$ ) al eje longitudinal de la viga ( $\bar{x}$ ), tal como puede apreciarse en la [Figura 1.2](#). Por su parte, las siglas AFG hacen referencia a que las propiedades del material funcionalmente graduado (que compone a la viga) varían en la dirección de la directriz o axial del elemento.

## **1.3 ELEMENTO ESTRUCTURAL VIGA**

### **1.3.1 Concepto y aplicación**

Una viga es un elemento estructural, que se caracteriza por tener una de sus dimensiones (longitud) siempre mayor que las otras dos (ancho y altura). Las vigas pueden ser rectas o curvas, de sección trasversal constante, ahusada o escalonada, etc. Tienen la capacidad para resistir cargas (estáticas y dinámicas) en la dirección transversal de su directriz, así como en la dirección axial y generalmente se ubican en forma horizontal, aunque también pueden trabajar en forma inclinada. En la práctica, pueden estar constituidas por distintos materiales y ser de

distintas formas, por lo que las propiedades físicas y las características geométricas pasan a cumplir un rol importante en el análisis estructural.

La viga representa uno de los elementos estructurales fundamentales actualmente en uso. Su importancia en las estructuras atestigua el exhaustivo empeño por estudiar su comportamiento frente a diferentes solicitaciones, en la amplia variedad de aplicaciones en que se implementan (Clark, 1975).

A lo largo de la historia, el estudio de la resistencia de materiales sobre elementos estructurales, así como de la teoría de la elasticidad para explicar su comportamiento, han sido un importante foco de interés en la humanidad. Principalmente ante la necesidad del hombre de construir distintos tipos de estructuras resistentes, tales como: edificaciones, puentes, presas, acueductos, torres, etc.

Los primeros documentos sobre la implementación de elementos resistentes en la construcción datan de las civilizaciones egipcias, griegas (Arquímedes (287-212 a.C.)) y romanas (Vitruvio (80 -15 a.C.)). Aunque podría decirse que el auge de su evolución surge a partir del siglo XVI. En este siglo se destacan los aportes brindados por L. Da Vinci (1452-1519). En el siglo XVII, aparecen las contribuciones memorables de G. Galilei (1564-1642), R. Hooke (1635-1703), E. Mariotte (1620-1684), I. Newton (1642-1727), J. Bernoulli (1654-1705), D. Bernoulli (1700-1782), L. Euler (1707-1783) y J.-L. Lagrange (1736-1813).

En el siglo XVIII y XIX, se sumarían los aportes de C. Coulomb (1736-1806), L. Navier (1785-1836), J.-V. Poncelet (1788-1867), T. Young (1773-1829), A. Cauchy (1789-1857), S. Poisson (1781-1840), G. Lamé (1795-1870), Barré de Saint-Venant (1797-1886), D. Jourawski (1821-1891), F. Neumann (1798-1895), S. Germain (1776-1831), G. Kirchhoff (1824-1887), J. Bresse (1822-1883), C. Mohr (1835-1918), J.W.S Rayleigh (1842-1919), H. Hertz (1857-1894), entre otros (Timoshenko,1952 ; Renton, 2002) .

Finalmente, en el siglo XX se dieron notables contribuciones a las teorías de vigas por parte de S. Timoshenko (1878-1972), V.Z. Vlasov (1906-1958), J.N. Reddy, W.B. Bickford, M. Levinson, etc. En la actualidad, muchas de las teorías de vigas siguen evolucionando gracias a la constante innovación y la aparición de nuevos supuestos físico-matemáticos.

Paralelamente a la conformación de la teoría de la elasticidad y la resistencia de materiales, hubo aportes de brillantes matemáticos, físicos e ingenieros para la formulación de principios y la aparición de distintas metodologías que permitieran resolver las ecuaciones diferenciales gobernantes de los elementos, de manera exacta o en la forma débil, o bien desde un punto de vista energético. Se destacan personalidades como: J. d'Alembert (1717-1783), J. Fourier (1768-1830), W.R. Hamilton (1805-1865). H. Reissner (1874-1967), P.-S. Laplace (1749-



1827), J. Rayleigh (1842-1919)–W. Ritz (1878-1909), F.W. Taylor (1856-1915); (Rao, 2007).

Todo este conocimiento, adquirido durante siglos de investigación, ha contribuido a que existan, actualmente, las herramientas esenciales para que las ingenierías puedan resolver diferentes problemas estructurales. En particular, en lo que aquí concierne sobre las vigas.

Si bien la ingeniería estructural es quien se ocupaba del diseño y cálculo de estos elementos, el campo de aplicación tradicional en la ingeniería civil (construcción de puentes, edificios, etc.) se ha extendido a otras ingenierías. Las vigas encontraron aplicación en la ingeniería mecánica (ejes giratorios que transportan poleas y engranajes, bastidores de máquinas, brazos robóticos, etc.), aeronáutica (fabricación de aviones), aeroespacial (naves espaciales), electrónica (diseño y fabricación de sistemas micro/nano electromecánicos “MEMS”), la industria automotriz (fabricación de automóviles), etc.; (Leissa y Qatu, 2011).

### **1.3.2 Teorías de vigas**

Si bien las vigas reales son sólidos deformables tridimensionales, su geometría aproximadamente unidimensional permite hacer ciertas simplificaciones matemáticas que facilitan su estudio. Es decir, mediante la aplicación de las teorías de vigas (que constituyen una parte de la resistencia de materiales) se pueden calcular aproximadamente las tensiones, desplazamientos y esfuerzos en las vigas.

En cuanto al estudio de las vibraciones transversales libres de vigas (Han et al., 1999), se destacan cuatro teorías clásicas: Bernoulli-Euler, Rayleigh, corte (Shear) y Timoshenko. La diferencia fundamental entre ellas radica sobre la consideración de la deformación por corte y la inercia rotatoria de la viga. La teoría de Bernoulli-Euler no contempla ninguno de esos dos efectos, la teoría de Rayleigh sólo considera la inercia rotacional de las secciones transversales de la viga, mientras que la de corte (Shear) sólo contempla el efecto de corte. Por otro lado, la teoría de Timoshenko es más completa, y contempla los dos efectos simultáneamente.

Han et al. (1999), hacen una importante reseña histórica en relación al surgimiento de las distintas teorías de vigas mencionadas. Particularmente, en esta tesis se pondrá énfasis en analizar el comportamiento dinámico de vigas mediante las teorías de Bernoulli-Euler (por su simplicidad) y de Timoshenko (por su mayor precisión).

#### **1.3.2.1 Teoría de Bernoulli-Euler**

El modelo de viga de Bernoulli-Euler es el más sencillo de todos. El mismo permite determinar la ecuación que describe el comportamiento dinámico de vigas esbeltas, teniendo en consideración únicamente las fuerzas de inercia debidas a la traslación transversal. Es decir,

sin considerar los efectos de deformación por corte ni de inercia rotatoria de la viga.

La primera ecuación para el problema de la viga vibrante fue desarrollada por Daniel Bernoulli (Bernoulli, 1735). Posteriormente, Leonhard Euler (Euler, 1744) aportaría las primeras soluciones para vigas con condiciones de borde clásicas: extremos simplemente apoyados, empotrados y libres.

Su sencillez en la aplicación, sumado a los excelentes resultados que permite obtener para vigas esbeltas, la han consagrado como una de las teorías más utilizadas. Los resultados son prácticamente aceptables, para las primeras frecuencias naturales de vibración transversal, cuando se cumplen las siguientes relaciones adimensionales (ver Figura 1.2)  $I_z / Al^2 \leq 0.001$  (Rossi, 2007) o  $l/h \geq 10$  (Mataix Ferrándiz, 2013). Siendo  $A$  el área de la sección transversal  $I_z$  el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje de flexión,  $l$  la longitud de onda del modo de vibración en análisis y  $h$  la altura de la sección transversal.

Por otra parte, Rossi et al. (1990) demostraron en su trabajo que la relación  $I_z / AL^2 \geq 10^{-7}$ , se corresponde, desde el punto de vista práctico ingenieril, a la clásica teoría de vibraciones de Bernoulli-Euler. Siendo  $L$  la longitud total de la viga (Figura 1.2).

En la presente tesis se define como coeficiente de esbeltez a la relación  $S = L\sqrt{A_0 / I_0}$ , donde el subíndice 0 indica que el área y el momento de inercia, están en referencia a la sección transversal inicial en la coordenada espacial  $\bar{x} = 0$ .

Las hipótesis sobre las que se sustenta, son las siguientes:

- 1) Las dimensiones transversales de la viga son pequeñas con respecto a la longitud  $L$ .
- 2) El material es elástico lineal (Hookeano).
- 3) Se asumen pequeñas deformaciones. Es decir, los desplazamientos transversales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la viga.
- 4) No se considera la existencia de tensiones normales en la dirección “ $\bar{z}$ ” ( $\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ ), lo que implica que el desplazamiento lateral es nulo.
- 5) Hipótesis de Navier-Bernoulli: Las secciones transversales permanecen planas y normales al eje de la viga durante el movimiento, pues se desprecia la deformación debida al corte. En otras palabras, las secciones planas inicialmente perpendiculares al eje de la viga, siguen siendo perpendiculares a dicho eje durante la deformación.
- 6) Se desprecia la inercia rotacional de la viga.

La ecuación que gobierna el problema dinámico de vigas, en general, puede deducirse de dos formas: 1) Aplicando el cálculo de variaciones.

2) Analizando el equilibrio de un elemento diferencial de viga.

Indistintamente de cuál sea el camino elegido, se analiza la vibración transversal libre en el plano  $\bar{x} - \bar{y}$  (asumido de simetría para cualquier sección transversal) de una viga prismática de sección transversal constante (ancho  $b$  y altura  $h$ ) y de longitud  $L$ . Además, para referenciar el movimiento, se introduce un sistema de coordenadas, donde el eje  $\bar{x}$  concuerda con la línea recta que une los baricentros de todas las secciones transversales (en la posición sin deformar) y los ejes  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  coinciden con los ejes principales de inercia de la sección transversal de la viga, tal como evidencia la [Figura 1.2](#).

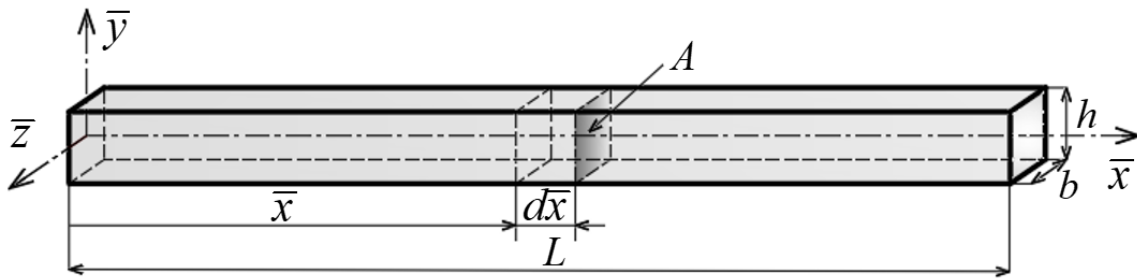


Figura 1.2: Viga prismática de material homogéneo y sección constante.

La primera forma utiliza las expresiones de las energías potencial (de deformación) y cinética de la viga, las cuales se deducen de aplicar la teoría lineal de la elasticidad a un elemento diferencial tridimensional ([Rossi, 2007](#)). Posteriormente, se aplica el principio de Hamilton sobre el funcional de energía y haciendo uso de las reglas del cálculo de variaciones se determinan la ecuación diferencial gobernante y las expresiones para las condiciones de frontera del problema ([Grossi, 2010](#)).

La segunda forma es la forma tradicional y quizás la más difundida desde el punto de vista ingenieril. En esencia, consiste en analizar el diagrama de cuerpo libre de un elemento viga de longitud  $d\bar{x}$ , sobre el cual intervienen acciones internas (esfuerzos internos de corte y momento flector) e inerciales (fuerza de inercia traslacional), tal como muestra la [Figura 1.3](#).

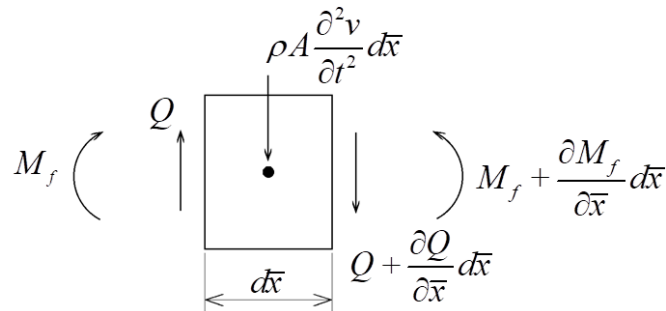


Figura 1.3: Diagrama de cuerpo libre para elemento diferencial de la viga Bernoulli-Euler en equilibrio.

Los sentidos positivos para el esfuerzo de corte  $Q$  y momento flector  $M_f$  están definidos de acuerdo a la convención implementada por [Weaver et al. \(1990\)](#).  $v = v(\bar{x}, t)$  representa el desplazamiento transversal de la viga según el eje  $\bar{y}$  y  $\rho$  la densidad de masa del material que constituye a la viga. Cabe destacar que en el diagrama de cuerpo libre se considera un desplazamiento inicial positivo (hacia arriba), dado que la inercia traslacional actúa en sentido contrario al movimiento.

De acuerdo con el esquema ([Figura 1.3](#)), la condición de equilibrio dinámico de fuerzas (segunda ley de Newton) en la dirección  $\bar{y}$  debe ser nula. Entonces,

$$Q - Q - \frac{\partial Q}{\partial \bar{x}} d\bar{x} - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\bar{x} = 0. \quad (1.1)$$

Por su parte, la condición de equilibrio de momentos (despreciando los términos infinitésimos de orden superior), respecto al extremo izquierdo del elemento diferencial es:

$$-M_f - Q d\bar{x} + M_f + \frac{\partial M_f}{\partial \bar{x}} d\bar{x} = 0. \quad (1.2)$$

Luego, derivando la Ec. (1.2) respecto  $\bar{x}$  y sustituyendo en la Ec. (1.1) se obtiene:

$$-\frac{\partial^2 M_f}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3)$$

De la teoría elemental de flexión de vigas y de acuerdo a la convención de signos establecida, se sabe que:

$$M_f = EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}^2}, \quad (1.4)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal o de Young del material que constituye a la viga. Luego, sustituyendo la Ec. (1.4) en la Ec. (1.3), se llega finalmente a la ecuación diferencial para la vibración transversal libre de la teoría de vigas de Bernoulli-Euler:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left( EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

Al considerar la viga prismática de sección constante y constituida por un material homogéneo, el término  $EI_z$  es constante; por lo que la Ec. (1.5) podría escribirse como:

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial \bar{x}^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{o simplemente,} \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial \bar{x}^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (1.6)$$

### 1.3.2.2 Teoría de Timoshenko

El modelo de vigas propuesto por el profesor Stephen Timoshenko ([Timoshenko, 1921, 1922](#)) permite contemplar los efectos de la deformación por corte y de la inercia rotacional de manera combinada. Estas consideraciones, la hacen una teoría adecuada para describir el comportamiento de vigas cortas ( $6 \leq l/h < 10$ ) ([Mataix Ferrándiz, 2013](#)), vigas compuestas tipo sándwich y vigas sometidas a grandes excitaciones (altas frecuencias), que incluyen las esbeltas ([Rossi, 2007](#)).

La teoría de Timoshenko coincide con la teoría de Bernoulli-Euler en las primeras 4 hipótesis enunciadas. La hipótesis de Navier-Bernoulli deja de cumplirse para vigas cortas (poca esbeltez), debido al efecto de distorsión por corte que introducen las tensiones tangenciales. Para contemplarlo, es que Timoshenko supone que las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación permanecen planas, pero no necesariamente ortogonales a dicho eje después de la deformación ([Timoshenko, 1953](#)). En consecuencia, la deformación real de la sección transversal se aproxima mejor que para la teoría de Bernoulli-Euler.

Por lo tanto, la teoría de Timoshenko considera una viga menos rígida en comparación a la de Bernoulli-Euler, por lo que las frecuencias de vibración son menores para las mismas condiciones de borde y poseen mayores deflexiones verticales bajo la acción de una misma carga estática. Obviamente, si el módulo de elasticidad transversal o de corte  $G$  tendiera a infinito ( $G \rightarrow \infty$ ), la viga se volvería infinitamente rígida a la deformación por corte y coincidiría con los resultados que brinda la teoría de Bernoulli-Euler.

Esto sucede de alguna manera cuando las vigas son esbeltas y para bajas frecuencias, dado que las deformaciones producto del esfuerzo de corte son despreciables frente a las deformaciones ocasionadas por el momento flector, y por ende el giro relativo de la sección se aproxima a la derivada del desplazamiento vertical (tal como expresa la teoría de Bernoulli-Euler). Es evidente entonces, que el primer modelo se puede suponer como un caso particular del segundo.

En el trabajo de [Bambill y Rossit \(2014\)](#) se evidencia que cuando la esbeltez es grande ( $S \geq 2500$ ) los resultados que brinda la teoría de vigas de Timoshenko, coinciden con los de Bernoulli-Euler para las primeras frecuencias naturales, con menor longitud de onda  $l$ .

Las ecuaciones gobernantes para el problema dinámico de la viga Timoshenko, pueden deducirse por el camino del cálculo de variaciones ([Dym y Shames, 2013](#)) o bien mediante el análisis del elemento diferencial ([Laura et al., 1992](#)), tal como se desarrolló para la viga

Bernoulli-Euler. Al tener en cuenta la deformación debida al corte, la pendiente total de la curva de deflexión en un elemento diferencial de viga de sección constante y de longitud  $d\bar{x}$ , toma la siguiente forma (Figura 1.4):

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{x}} = \psi + \gamma \quad (1.7)$$

donde  $\psi = \psi(\bar{x}, t)$  es la rotación del eje de la viga debida a la flexión y  $\gamma = \gamma(\bar{x}, t)$  es la distorsión (deformación por corte), cuyo efecto se puede asemejar a una rotación del eje de la viga debido al esfuerzo de corte. El esquema de la Figura 1.4, evidencia que las secciones rectas ya no son normales al eje de la viga deformada (Clark, 1975).

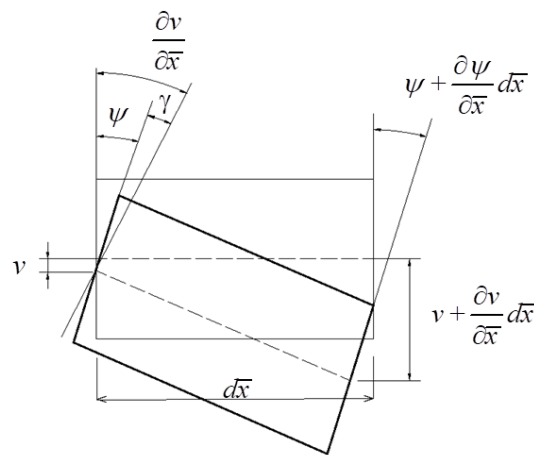


Figura 1.4: Diagrama de desplazamientos infinitesimales de un diferencial de viga Timoshenko.

Por otro lado, para determinar la ecuación gobernante del problema de la viga vibrante para la teoría de Timoshenko, se consideran las siguientes acciones internas (esfuerzos internos de corte y momento flector) e inerciales (fuerza de inercia traslacional y rotacional), representadas en la Figura 1.5 sobre un elemento diferencial (Laura et al., 1992):

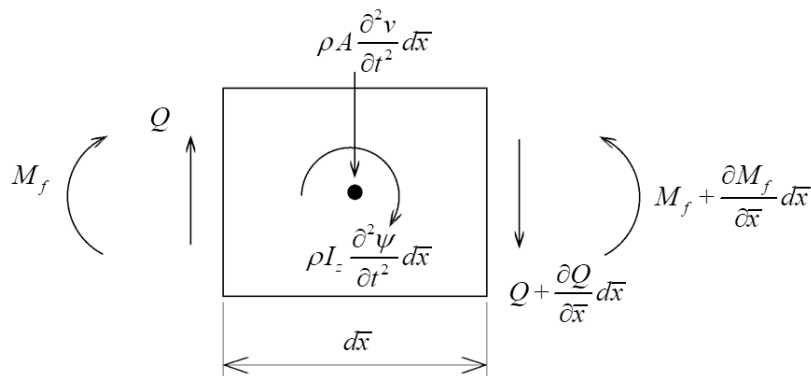


Figura 1.5: Diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial de viga Timoshenko en equilibrio.

Las ecuaciones que relacionan los esfuerzos internos resultantes con la deformación de la viga son:

$$M_f = EI_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^2}, \quad (1.8)$$

para el momento flector y

$$Q = -GA_s \gamma = -G\kappa A \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} - \psi \right) \quad (1.9)$$

para el esfuerzo de corte, teniendo en cuenta la Ec. (1.7). Donde  $A_s = \kappa A$  es el área efectiva de la sección transversal y  $\kappa$  es el factor de corrección por corte, cuyo valor depende de la forma de la sección transversal y de las condiciones de frontera de permitir o no el alabeo. En su trabajo original, [Timoshenko \(1921\)](#) adoptó  $\kappa = 2/3$  para la sección rectangular (relación entre la tensión media y la máxima, en el eje neutro, que resulta al aplicar la fórmula de Colignon-Jouravski). Luego, se comprobó que era más conveniente determinarlo mediante equivalencia energética. Para el caso particular de la sección rectangular maciza, se obtiene  $\kappa = 5/6$ . Además, existen otras fórmulas provenientes de estudios con la teoría de elasticidad, en las que el factor de corrección por corte  $\kappa$  depende también del coeficiente  $\mu$  de Poisson. Esto se puede visualizar en los trabajos de [Blevins \(1964\)](#), [Cowper \(1966\)](#) y [Stephen \(2001\)](#).

Considerando la viga prismática de la [Figura 1.2](#), de sección constante y material homogéneo, la condición de equilibrio dinámico de fuerzas coincide con la Ec. (1.1). Expresada en términos de las Ec. (1.9), se tiene en este caso:

$$\kappa GA \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \right) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.10)$$

Por su parte, para el equilibrio de momentos se tiene:

$$-Q d\bar{x} + \frac{\partial M_f}{\partial \bar{x}} d\bar{x} - \rho I_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} d\bar{x} = 0, \quad (1.11)$$

que expresada en términos de las Ecs. (1.8) y (1.9), adopta la forma:

$$\kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} - \psi \right) + EI_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^2} - \rho I_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.12)$$

Cabe acotar que, las Ecs. (1.10) y (1.12) constituyen el sistema de ecuaciones diferenciales gobernantes para la viga Timoshenko homogénea y de sección constante.

Por otro lado, el problema de la viga Timoshenko vibrante se puede escribir en términos de

una única variable, ya sea del desplazamiento vertical  $v$  o del giro  $\psi$  de la sección transversal.

[Cheng \(1970\)](#) obtuvo las correspondientes expresiones.

En términos de  $\psi$  la ecuación diferencial gobernante es:

$$EI_z \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \rho I_z \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_z}{\kappa G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0. \quad (1.13)$$

Esta ecuación se obtiene de despejar  $v$  en función de  $\psi$ , en la Ec. (1.12) y luego reemplazarla en la Ec. (1.10). Por su parte, en términos de  $v$  la ecuación diferencial gobernante resulta:

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I_z \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_z}{\kappa G} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0. \quad (1.14)$$

En este caso, se despeja  $\psi$  en función de  $v$ , en la Ec. (1.10) y luego se reemplaza en la Ec. (1.12). Se puede apreciar que las expresiones obtenidas son análogas, y que si se deprecia el efecto de la inercia rotacional en la Ec. (1.14), esta coincide con la Ec. (1.6) obtenida para la teoría de Bernoulli-Euler.

## 1.4 MATERIALES FUNCIONALMENTE GRADUADOS

### 1.4.1 Evolución de los materiales

Históricamente, la evolución y el desarrollo de las sociedades se han asociado con la capacidad de sus integrantes para producir y conformar materiales que cubrieran sus necesidades. Tal ha sido su importancia, que las primeras civilizaciones fueron clasificadas de acuerdo al material que alcanzó mayor desarrollo: Edad de Piedra, Edad del Cobre, Edad de Bronce y Edad del Hierro. Esta secuencia tiene implicancia en todas las áreas, ya que el uso del hierro requiere más tecnología que la necesaria para fabricar el bronce y para trabajar la piedra ([Callister Jr., 1995](#)).

[Mahamood et al. \(2012\)](#) han establecido que existen numerosas situaciones tecnológicas en las que los metales puros no tienen una aplicación útil. Por ejemplo, si se requiere que el material a emplear tenga dureza y ductilidad al mismo tiempo, tal material no es conocido en la naturaleza. Para solucionar este problema, es que el hombre ha recurrido a combinar dos metales o un metal con un material no metálico. Cuando esa combinación se efectúa con materiales fundidos, se denomina aleación tradicional o convencional. Un ejemplo de notable importancia histórica fue la aleación entre cobre y estaño para generar bronce.

Desde entonces, el hombre ha recorrido un largo camino para mejorar las propiedades de los materiales que ha utilizado, como apoyo para su desarrollo. En la actualidad, los materiales



compuestos, formados por dos o más materiales combinados en estado sólido, con propiedades físicas y químicas diferentes de los materiales parentales individuales, son altamente utilizados.

Si bien existe una gran variedad de materiales compuestos, en todos ellos se distinguen: la matriz, en fase continua, que es el componente que actúa como ligante y el refuerzo, en fase discontinua, que es el elemento resistente. La matriz es la responsable de las propiedades físicas y químicas, transmite los esfuerzos al refuerzo, lo protege y le brinda cohesión al material.

Son muchas las combinaciones posibles de distintos tipos de materiales, sin embargo, una de las más utilizadas en la actualidad son los refuerzos, constituidos por fibras de materiales muy resistentes en una matriz cerámica. En muchos casos esas fibras están orientadas según requerimientos de diseño (siguen comportamientos constitutivos caracterizados por materiales ortótropos o anisótropos en el caso más general).

A pesar de las enormes ventajas comparativas que presentan estos últimos sobre los materiales convencionales, los compuestos pueden fallar en condiciones extremas de esfuerzo a través del proceso de "delaminación", es decir, la separación de las fibras de la matriz, lo que daña la transmisión de esfuerzos, [Wang \(1983\)](#) y [Martínez et al. \(2011\)](#). Este problema fue resuelto en Sendai (Japón) por un grupo de investigadores japoneses a mediados de los ochenta, al enfrentar el reto de proyectar una barrera térmica para un avión espacial hipersónico (con una temperatura exterior 2000K e interior 1000K, en menos de 10 mm de espesor). Para ello, recurrieron a un nuevo tipo de material ([Niino et al., 1987](#)), cuyas propiedades variaban gradualmente, denominados Functionally Graded Materials (FGM, por sus siglas en inglés).

Este material revolucionario elimina las interfaces bruscas y las sustituye por una interfaz gradual que produce una transición suave entre un material y el próximo. En consecuencia, se reducen las tensiones residuales y térmicas, así como los factores de concentración de tensiones que se hallan en los compuestos laminados.

[Knoppers et al. \(1999\)](#), evidencian que este tipo de material se encuentra en la naturaleza, por ejemplo, en el cuerpo humano formando parte de los huesos o los dientes. La propia naturaleza los ha diseñado para responder a determinados requisitos de servicio; con una parte exterior muy resistente al desgaste y una parte interior lo suficientemente blanda para soportar la fatiga y la fractura frágil.

Los FGM ([Mahamood y Akinlabi, 2017](#)) constituyen una clase de materiales avanzados, en los que sus propiedades varían gradualmente en alguna o varias de sus dimensiones. Pueden fabricarse mediante una ley de variación predeterminada, de manera que el contenido en porcentaje de dos o más materiales que constituyan al nuevo material, permitan obtener las propiedades requeridas (con un gradiente deseado) en las direcciones espaciales establecidas.

Esta libertad en el diseño, les otorga la característica más particular y distintiva, que es su capacidad para adaptarse a una aplicación específica.

Los FGM son sin lugar a duda, una excelente alternativa para innovar en las modernas y futuras aplicaciones ingenieriles. A pesar de todas sus ventajas, aún hay una serie de obstáculos que deben ser resueltos en esta tecnología prometedora. El costo de fabricación es aún extremadamente alto, falta mejorar el rendimiento global del proceso, así como incrementar la fiabilidad de fabricación. Es por ello, que todos los esfuerzos están puestos en mejorarlas a futuro. En los trabajos de [OTEA \(2011\)](#), [Udupa et al., \(2014\)](#), [Bhavar et al., \(2017\)](#), [Montero Manso \(2017\)](#) y [Himasekhar Sai \(2018\)](#); se puede encontrar una revisión sobre las metodologías y tecnologías de fabricación que se están implementando y se siguen desarrollando.

#### **1.4.2 Aplicación del FGM en vigas**

En virtud de las favorables e importantes características citadas, se han desarrollado numerosos estudios acerca del comportamiento estático y dinámico de las estructuras resistentes compuestas por FGM. Originalmente, la tarea investigativa estableció grandes avances en el campo de la Teoría de la Elasticidad, el estudio de placas y láminas. Paradójicamente, su aplicación a vigas (Functionally Graded Beams -FGB-) fue bastante posterior.

Las vigas son posiblemente el elemento estructural más difundido en la generalidad de las estructuras resistentes; y particularmente, cuando se encuentran en entornos vibratorios adquiere esencial importancia el conocimiento de sus parámetros dinámicos. En estas circunstancias, además, el efecto inercial del material (que las constituye) cumple un rol fundamental. Es por eso, que en las últimas dos décadas, ha adquirido particular trascendencia la utilización de los FGM con variación en alguna de sus dimensiones.

[Sankar \(2001\)](#), desarrolló un modelo de viga Bernoulli-Euler con FGM para abordar un problema estático en una viga con vínculos simplemente apoyados. Luego, [Aydogdu y Taskin \(2007\)](#), estudiaron las vibraciones transversales libres de una viga simplemente apoyada. Adicionalmente, [Chabraborty et al. \(2003\)](#) desarrollaron un elemento finito para estudiar el comportamiento termo-elástico de vigas con FGM. [Lu y Chen \(2005\)](#) y [Zhong y Yu \(2007\)](#), desarrollaron complejos procedimientos analíticos para resolver en forma exacta las vigas con FGM dentro del marco de la Teoría de la Elasticidad. Todos estos trabajos mencionados se realizaron sobre la base del modelo de Bernoulli-Euler.

Los antecedentes bibliográficos evidencian que los primeros trabajos publicados sobre vigas

con FGM consideraron, en su mayoría, la gradación de las propiedades del material en la dirección transversal al eje de la viga, siendo menor la cantidad de trabajos que trataron la gradación de las propiedades del material en la dirección axial (Axially Functionally Graded - AFG-). Esto se debe a que el problema se torna más complicado de resolver cuando aparecen coeficientes variables en las ecuaciones gobernantes, como ocurre en el segundo caso. En consecuencia, a causa de las dificultades en el tratamiento matemático, se han obtenido pocas soluciones analíticas y solo para determinados gradientes: por ejemplo, Elishakoff y sus colegas - [Elishakoff \(2000\)](#), [Elishakoff y Candan \(2001\)](#), [Caliò y Elishakoff \(2004\)](#) y [\(2005\)](#), [Elishakoff y Guédé \(2004\)](#), [Elishakoff \(2005\)](#) y [Wu, Wang y Elishakoff \(2005\)](#)-, haciendo uso del método semi-inverso, abordaron diversos casos de vigas AFG vibrantes.

En general, ha debido recurrirse a soluciones aproximadas. [Huang y Li \(2010\)](#), resolvieron el problema transformando la ecuación diferencial gobernante con coeficientes variables en una ecuación integral de Fredholm. [Alshorby et al. \(2011\)](#), investigaron las características dinámicas de vigas no-uniformes con graduación del material axialmente y transversalmente en la altura, por medio del método de elementos finitos (FEM). [Çetin y Şimşek \(2011\)](#), obtuvieron frecuencias de vibración libre de vigas AFG embebidas en un medio elástico Winkler-Pasternak. [Hein y Feklistova \(2011\)](#) investigaron la vibración de las vigas AFG con sección transversal variable y para diversas condiciones de contorno, utilizando wavelets de Haar. [Şimşek et al. \(2011, 2012\)](#) estudiaron el comportamiento dinámico de vigas AFG bajo la acción de una carga en movimiento. [Shahba y Rajasekaran \(2012\)](#), estudiaron las vibraciones y el pandeo de vigas AFG Bernoulli-Euler utilizando el método de elemento de transformada diferencial (DTEM) y el método de elemento de cuadratura diferencial de orden inferior (DQEL). [Agköz y Civalek \(2013\)](#), estudiaron las vibraciones longitudinales de barras AFG sobre la base de la teoría del gradiente de deformaciones recurriendo al método de Rayleigh-Ritz. [Chegenizadeh et al. \(2014\)](#) estudiaron estática y dinámicamente vigas AFG incrustados en un medio elástico. [Kukla y Rychlewska \(2014\)](#) estudiaron vibraciones libres de vigas AFG simplemente apoyadas, implementando una función exponencial para resolver la ecuación diferencial gobernante. [Rychlewska \(2014\)](#) a su vez, analizó la vibración de vigas AFG con la presencia de cargas axiales.

Por su parte, vigas AFG Bernoulli-Euler de sección transversal variable y con diferentes condiciones de contorno se estudiaron mediante varios enfoques: [Gilardi et al. \(2016a\)](#) empleando los métodos de cuadratura diferencial generalizada (GDQM) y Rayleigh-Ritz, [Ghazaryan et al. \(2017\)](#) utilizando el método de transformación diferencial (DTM), [Chen et al. \(2017\)](#) introdujo un método numérico para transformar la ecuación diferencial en un conjunto

de ecuaciones algebraicas lineales con la función de desplazamiento expandida utilizando series de Taylor o polinomios de Chebyshev y [Xie et al. \(2017\)](#) mediante un enfoque de colocación espectral basado en polinomios integrados.

Entre los estudios dinámicos de vigas AFG Bernoulli-Euler con sección transversal variable y que poseen masas adosadas, se destacan los trabajos de: [Gilardi et al. \(2015\)](#) quienes analizaron la vibración libre para vigas cantiléver con una masa en el extremo libre y [Rossit et al. \(2017\)](#) que lo extendieron para un modelo con  $N_m$  masas adosadas. Ambos trabajos emplearon el método de Rayleigh-Ritz para obtener la solución al problema. [Gilardi et al. \(2016b\)](#) obtuvieron resultados, además, para (GDQM) y [Nikolić \(2017\)](#) mediante el método del elemento rígido. [Šalinić et al. \(2018\)](#) presentaron un análisis completo para vibraciones de barras y vigas AFG Bernoulli-Euler, con sección transversal ahusada, escalonadas y continuamente segmentadas, para extremos elásticamente restringidos y con masas adosadas. Implementaron para su resolución una modificación del método de parámetros iniciales en forma diferencial (MIPDF).

En cuanto los artículos sobre vigas de AFG Timoshenko, deben mencionarse el trabajo de [Shahba et al. \(2011\)](#), quienes estudiaron la vibración libre y la estabilidad de vigas AFG Timoshenko, para condiciones de borde clásicas y elásticas, a través de un enfoque de elementos finitos. [Huang et al. \(2013\)](#), presentaron un nuevo enfoque: al introducir una función auxiliar, cambiando las ecuaciones gobernantes acopladas con coeficientes variables para la deflexión y rotación a una sola ecuación. [He et al. \(2013\)](#) mejoraron el elemento de viga tradicional para considerar los parámetros axiales variables, formulándolos en términos de una serie de potencia. [Tang et al. \(2014\)](#) obtuvieron soluciones de forma cerrada para vigas AFG Timoshenko, uniformes cuya rigidez a la flexión y densidad de masa distribuida se supone que obedecen a una ley exponencial unificada. [Rajasekaran y Norouzzadeh Tochaei \(2014\)](#) analizaron la vibración libre de vigas AFG Timoshenko mediante DTEM y el método del elemento de cuadratura (DQM). Además, demostraron que DQEL mejora significativamente la precisión de los resultados, comparando la precisión con varios ejemplos numéricos.

[Sarkar y Ganguli \(2014\)](#) encontraron soluciones de forma cerrada para ciertas variaciones polinómicas de la densidad de masa del material, el módulo elástico y el módulo de corte, a lo largo de la longitud del haz. [Gilardi et al. \(2014\)](#) estudiaron la rigidización dinámica de vigas AFG rotantes y escalonadas mediante GDQM y FEM. [Bambill y Rossit \(2014\)](#) analizaron el comportamiento dinámico de vigas AFG Timoshenko escalonadas y con sección transversal variable, para condiciones de borde simplemente apoyada y en voladizo, utilizando GDQM. [Bambill et al. \(2015\)](#) extenderían los cálculos para distintas condiciones de borde clásicas, pero

para vigas escalonadas con sección transversal constante.

[Gan et al. \(2015\)](#) presentaron un procedimiento de elementos finitos para el análisis dinámico de vigas AFG Timoshenko no uniformes bajo múltiples cargas puntuales móviles. [Akbaş \(2015\)](#), estudió el post-pandeo para vigas AFG Timoshenko en voladizo, empleando un modelo de elementos finitos Lagrangiano del continuo tridimensional. [Huang et al. \(2016\)](#) estudiaron los comportamientos de pandeo para vigas con sección transversal variable, empleando una función auxiliar y series de potencias. [Zhao et al. \(2017\)](#) introdujo un nuevo enfoque basado en la teoría de los polinomios de Chebyshev. [Tudjono et al. \(2017\)](#) derivaron funciones de forma exactas para la formulación del elemento de viga Timoshenko no uniforme (sección no prismática) e inhomogénea (material graduado funcionalmente) explícitamente. [Gan et al. \(2017\)](#) analizaron el post-pandeo de vigas planas y marcos AFG por medio de FEM. [Gilardi et al. \(2017\)](#), analizaron las vibraciones transversales libres de vigas AFG escalonadas con condiciones de borde clásicas y con la presencia de una masa puntual adosada. Para el estudio emplearon los métodos de Rayleigh-Ritz, GDQM y FEM.

Más recientemente, [Rossit et al. \(2018\)](#) estudiaron el efecto de masas concentradas adosadas sobre la vibración de vigas AFG Timoshenko, con sección transversal variable por medio del método de Rayleigh-Ritz. [Gilardi et al. \(2018a\)](#) empleando los métodos aproximados de Rayleigh-Ritz, GDQM y FEM obtuvieron soluciones para vigas AFG ahusadas con extremos elásticamente restringidos. [Gilardi et al. \(2018b\)](#) generalizaron el modelo para dos tramos, con vinculación elástica en los extremos y una masa adosada en la continuidad. [Gilardi et al. \(2018c\)](#) realizaron un estudio de rigidización dinámica para vigas en voladizo, mediante la remoción de masa en escalón e implementando el material AFG. Las soluciones las obtuvieron empleando GDQM y FEM.

Los trabajos de [Rossit et al \(2017,2018\)](#) y de [Gilardi \(2015, 2016a, 2016b, 2017, 2018a, 2018b\)](#), forman parte de la presente tesis.

## 1.5 REFERENCIAS

- Akbaş, S.D., Post-Buckling Analysis of Axially Functionally Graded Three-Dimensional Beams. *International Journal of Applied Mechanics*, 7 (3):1550047 (20 pages), 2015.
- Akgöz, B. y Civalek, Ö., Longitudinal Vibration Analysis of Strain Gradient Bars Made of Functionally Graded Materials (FGM). *Composites: Part B*, 55:263–268, 2013.
- Alshorbgy, A.E., Eltaher, M.A. y Mahmoud, F.F., Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 35:412–425, 2011.

- Aydogdu, M. y Taskin, V., Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Materials and Design*, 28: 1651–1656, 2007.
- Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Vibraciones libres de viga de sección variable construidas con material funcionalmente graduado. *Actas XXXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Montevideo, Uruguay*, 2014.
- Bambill, D.V., Rossit, C.A. y Felix, D.H., Free vibrations of stepped axially functionally graded Timoshenko beams. *Meccanica*, 50, 1073–1087, 2015.
- Bernoulli, D. Letters to Euler, Basel, 1735. Referencia extraída de *Vibration of shells and plates*. Werner Soedel. Marcel Dekker, INC., 1981.
- Beards, C.F., *Structural vibration: Analysis and damping*. John Wiley & Sons Inc., 1996.
- Bhavar, V., Kattire P., Thakare, S. 1, Sachin, P. y Singh, R.K.P., A Review on Functionally Gradient Materials (FGMs) and Their Applications. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 229: 012021(9 pages), 2017.
- Blevins, R.D., *Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand, 1964.
- Caliò, I. y Elishakoff, I., Closed-form trigonometric solutions for inhomogeneous beam-columns on elastic foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 4:139–146, 2004.
- Caliò, I. y Elishakoff, I., Closed-form solutions for axially graded beam-columns. *Journal of Sound and Vibration*, 280:1083–1094, 2005.
- Callister Jr., W.D., *Introducción a la Ciencia e Ingeniería de los Materiales*. Reverté S.A., 1995.
- Çetin, D. y Şimşek, M., Free vibration of an axially functionally graded pile with pinned ends embedded in Winkler-Pasternak elastic medium. *Structural Engineering and Mechanics*, 40:583–594, 2011.
- Chabraborty, A., Gopalakrishnan, S. y Reddy, J.N., A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45:519–539, 2003.
- Chegenizadeh, A., Ghadimi, B., Nikraz, H. y Şimşek M., A novel two-dimensional approach to modelling functionally graded beams resting on a soil medium. *Structural Engineering and Mechanics*, 51(5):727–741, 2014.
- Chen, D., Wang, Y., Peng, X. y Zhou, L., Dynamic buckling of axially functionally-graded beams with non-uniform cross-section under elastic compression stress wave. *Zhendongyu Chongji /Journal of Vibration and Shock*, 36(13): 27-32 and 73, 2017.

- Cheng, F.Y., Vibrations of Timoshenko beams and frameworks. *Journal of the Structural Division, Proceedings of American Society of Civil Engineers*, 96(3):551-571, 1970.
- Clark, S.K., *Dinámica de los Elementos Continuos*. Reverté S.A., 1975.
- Cowper, G. R., The shear coefficient in Timoshenko beam theory. *Trans. ASME Journal of Applied Mechanics*, 33: 335–340, 1966.
- Dym, C.L., Shames, I.H., *Solid Mechanics, A Variational Approach Argumented Edition*. Springer, 2013.
- Elishakoff, I., A selective review of direct, semi-inverse and inverse eigenvalue problems for structures described by differential equations with variable coefficients. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 7(4), 387-461, 2000.
- Elishakoff, I. y Candan, S., Apparently First Closed-Form Solution for Vibrating: Inhomogeneous Beams. *In International Journal of Solids and Structures*, 38(9):3411-3441, 2001.
- Elishakoff, I. y Guédé, Z., Analytical polynomial solutions for vibrating axially graded beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11:517–533, 2004.
- Elishakoff, I., *Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-Form Solutions*. CRC Press, 2005.
- Euler, L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Berlin, 1744. Referencia extraida de *Vibration of shells and plates*. Werner Soedel. Marcel Dekker, Inc., 1981.
- Gan, B.S., Huong, T.T. y Kien, N.D., Post-buckling behaviour of axially FGM planar beams and frames. *Procedia Engineering*, 171:147–158, 2017.
- Gan, B.S., Trinh, T.H., Le, T.H. y Nguyen, D.K., Dynamic response of non-uniform Timoshenko beams made of axially FGM subjected to multiple moving point loads. *Structural Engineering and Mechanics*, 53(5): 981-995, 2015.
- Ghazaryan, D., Burlayenko, V.N., Avetisyan, A. y Bhaskar, A., Free vibration analysis of functionally graded beams with non-uniform cross-section using the differential transform method. *Journal of Engineering Mathematics*, 110(1): 97–121, 2017.
- Gilardi, G. J., Bambill, D.V., Rossit, C.A., Felix, D.H. y Rattazzi, A., Respuesta dinámica de vigas Timoshenko rotantes de materiales con propiedades variando funcionalmente. *Mecánica Computacional*, XXXIII: 1025-1039, 2014.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Free vibrations of an axially functionally graded beam with a concentrated mass. *1st. Pan-American Congress on Computational Mechanics -PANACM 2015-*, 410-421. CIMNE, 2015.

- Gilardi, G.J., Díaz Valdez, I.H., Bambill, D.V., Rossit, C.A. y Romero, F., Comportamiento dinámico de vigas constituidas por material funcionalmente graduado. *V CAIM*, (I-001:11 págs.). Publicado en las Actas del Congreso, 2016a.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Vibraciones de vigas construidas con material funcionalmente graduado que soportan masas adosadas. *Mecánica Computacional*, XXXIV: 529–544, 2016b.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Diversos enfoques para el estudio del comportamiento dinámico de vigas Timoshenko AFG. *Mecánica Computacional*, XXXV: 2165–2185, 2017.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Free vibrations of tapered AFG Timoshenko beams. (*Chapter 1*; 1–37). Yuen, J. (editor), *Computational Mechanics (CM), Applications and developments*. New York Nova Science Publishers, 2018a.
- Gilardi, G.J., Bambill D.V. y Rossit, C.A., Rigidización dinámica de vigas cantiléver con materiales funcionalmente graduados y sección variable. *Mecánica Computacional*, XXXVI: 215–224, 2018c.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Comportamiento dinámico de vigas Timoshenko AFG con vinculación elástica. *Mecánica Computacional*, XXXVI: 205–214, 2018b.
- Grossi, R.O., *Cálculo de Variaciones. Teoría y Aplicaciones*. CIMNE, 2010.
- Han, S. M., Benaroya, H. y Wei T., Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5): 935–988, 1999.
- He, P., Liu, Z y Li, C., An improved beam element for beams with variable axial parameters. *Shock and Vibration*, 20:601–617, 2013.
- Hein H. y Feklistova L., Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets. *Engineering Structures*, 33(12):3696–3701, 2011.
- Himasekhar Sai, B.V., A Review on Functionally Gradient Materials (FGMs) and Their Applications. *International Journal of Current Engineering and Technology*, 8(1):79–84, 2018.
- Huang, Y. y Li, X.F., A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 329: 2291–2303, 2010.
- Huang, Y., Yang, L. y Luo, Q., Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Composites: Part B*, 45:1493–1498, 2013.
- Huang, Y., Zhang, M. y Rong H., Buckling Analysis of Axially Functionally Graded and Non-Uniform Beams Based on Timoshenko Theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 29(2): 200–207, 2016.



- Kukla S. y Rychlewska, J., Free vibration of axially functionally graded Euler-Bernoulli beams. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 13(1):39–44, 2014.
- Knoppers, R., Gunnink, J.W., Van den Hout, J., y Van Vliet, W., The reality of functionally graded material products. *TNO Science and Industry, The Netherlands*, 38–43, 1999
- Laura, P. A. A., Rossi, R. E. y Maurizi, M. J., “Vibrating Timoshenko beams” A tribute to the 70<sup>th</sup> anniversary of the publication of Professor S. Timoshenko’s epoch making contribution. Publication *IMA N° 92-15*, 1992.
- Leissa, A.W. y Qatu, M.S., *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill, 2011.
- Lu, C.-F. y Chen, W.Q., Free vibration of orthotropic functionally graded beams with various end conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, 20:465–476, 2005.
- Mahamood R.M, Akinlabi E.T, *Functionally Graded Materials*. Springer, 2017.
- Mahamood R.M, Akinlabi E.T, Shukla M. y Pityana S., Functionally Graded Material: An Overview. *Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol. III*, 2012.
- Martínez, X., Oller, S. y Barbero, E., Caracterización de la delaminación en materiales compuestos mediante la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 27(3):189–199, 2011.
- Mataix Ferrandiz, V., *Formulación de un modelo analítico de viga de Timoshenko con torsión mixta para cálculo dinámico de puentes ferroviarios de alta velocidad. Aplicación a secciones compuestas hormigón-acero en cajón unicelular*. Tesis de Grado, 2013.
- Montero Manso, J. N., *Fabricación de materiales con gradiente funcional mediante LMD*. Tesis de Doctorado, 2017.
- Niino, M., Hirai, T. y Watanabe R., The functionally gradient materials. *Journal of the Japan Society for Composite Materials*, 13: 257–264, 1987.
- Nikolić, A., Free vibration analysis of a non-uniform axially functionally graded cantilever beam with a tip body. *Archive of Applied Mechanics*, 87(7):1227–1241, 2017.
- OTEA, (2011) Observatorio Tecnológico de Metal. Materiales con función gradiente [en línea]. Disponible en el sitio web: [observatorio.aimme.es/otea\\_document.asp?id=10388&n=1](http://observatorio.aimme.es/otea_document.asp?id=10388&n=1). Consulta: 23/04/2014.
- Rajasekaran, S. y Norouzzadeh Tochaei, E., Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation element method and differential quadrature element method of lowest-order. *Meccanica*, 49(4):995–1009, 2014.
- Rao, S.S, *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley & Sons, INC., 2007.
- Rao, S.S, *Vibraciones mecánicas: Quinta Edición*. Pearson, 2012.

- Renton, J.D., *Elastic beams and frames (second edition)*. Horwood Publishing Limited, 2002. Reprinted by Woodhead Publishing Limited, 2011.
- Rossi, R.E., Laura, P. A. A. y Gutiérrez, R.H., A note on transverse vibrations of a Timoshenko beam of non-uniform thickness clamped at one end and carrying a concentrated mass at the other. *Journal of Sound and Vibration*, 143(3):491–502, 1990.
- Rossi, R.E., *Introducción al análisis de Vibraciones con el Métodos de Elementos Finitos*. Edi UNS, 2007.
- Rossit, C.A., Bambill, D.V. y Gilardi, G.J., Free vibrations of AFG cantilever tapered beams carrying attached masses. *Structural Engineering and Mechanics*, 61(5):685–691, 2017.
- Rossit, C.A., Bambill, D.V. y Gilardi G.J., Timoshenko theory effect on the vibration of axially functionally graded cantilever beams carrying concentrated masses. *Structural Engineering and Mechanics*, 66(6):703–711, 2018.
- Rychlewska J., Buckling analysis of axially functionally graded beams. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 13(4):103–108, 2014.
- Šalinić, S., Obradovićb, A. y Tomovićb, A. Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams *Composites Part B*, 150:135–143, 2018.
- Sankar, B.V., An elasticity solution for functionally graded beams. *Composites Science and Technology*, 61: 689–696, 2001.
- Sarkar, K. y Ganguli, R., Closed-form solutions for axially functionally graded Timoshenko beams having uniform cross-section and fixed–fixed boundary condition. *Composites: Part B*, 58:361–370, 2014.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. y Hajilar, S., Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part B*, 42:801–808, 2011.
- Shahba, A. y Rajasekaran, S., Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical modelling*, 36: 3094–3111, 2012.
- Şimşek, M., Kocatürk, T. y Akbas, S.D., Dynamics of an axially functionally graded beam carrying a moving harmonic load. *16th International Conference on Composite Structures*, A. J. M. Ferreira (Editor), Porto-Portugal, 2011.
- Şimşek, M., Kocatürk, T. y Akbas, S.D., Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action. *Composite Structures*, 94:2358–2364, 2012.

- Stephen, N. G., On “A check on the accuracy of Timoshenko's beam theory”. *Journal of Sound and Vibration*, 257(4): 809–812, 2002.
- Tang, A.-Y., Wu, J.-X., Li, X.-F. y Lee, K.Y., Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded Timoshenko beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 89:1–11, 2014.
- Timoshenko, S.P., On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bar. *Philosophical Magazine*, 41:744–746, 1921.
- Timoshenko, S.P., On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. *Philosophical Magazine*, 43: 125–131, 1922.
- Timoshenko, S.P., *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill, 1952.
- Timoshenko, S.P., *Collected Papers*. McGraw-Hill, 1953.
- Tudjono, S., Han, A., Nguyen, D., Kiryu, S., y Gan, B., Exact Shape Functions for Timoshenko Beam Element. *IOSR-Journal of Computer Engineering*, 19(3): 12–20, 2017.
- Udupa, G, Rao, S.S. y Gangadharan, K.V., Functionally graded Composite materials: An overview. *Procedia Materials Science*, 5:1291–1299, 2014.
- Wang, S.S., Fracture mechanics for delamination problems in composite materials. *Journal of Composite Materials*. 17(3):210–223, 1983.
- Weaver, Jr., W., Timoshenko S.P. y Young, D.H., *Vibrations problems in Engineering*, 5th edition. John Wiley & Sons, 1990.
- White, G., *Introducción al Análisis de Vibraciones*. Azima DLI, 2010.
- Wu, L., Wang, Q. y Elishakoff, I., Semi-inverse method for axially functionally graded beams with an anti-symmetric vibration mode. *Journal of Sound and Vibration*, 284:1190–1202, 2005.
- Xie, X., Zheng, H., Zou, X., An integrated spectral collocation approach for the static and free vibration analyses of axially functionally graded non-uniform beams. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 231(13):2459–2471, 2017.
- Zhao, Y., Huang, Y. y Guo, M., A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory. *Composite Structures*, 168:277–284, 2017.
- Zhong, Z. y Yu, T., Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*, 67:481–488, 2007.

# **CAPÍTULO 2**

## **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG EN VOLADIZO CON UNA MASA ADOSADA**

### **MÉTODO DE RAILEYGH-RITZ**

### **TEORÍA DE VIGAS DE BERNOULLI-EULER**

## 2.1 MÉTODOS APROXIMADOS

La implementación de los métodos aproximados ha ganado mucha trascendencia para resolver diversos problemas prácticos de la ingeniería, especialmente en aquellos en los que obtener la solución exacta es una tarea sumamente ardua desde el punto de vista matemático. En particular, el problema dinámico de la viga vibrante con materiales AFG, constituye uno de ellos; pues la variación de las propiedades en la dirección axial conduce a ecuaciones diferenciales con coeficientes variables.

La determinación de los parámetros que caracterizan al comportamiento dinámico de la viga, se logra recurriendo a estos métodos. Mediante su implementación se obtiene una solución débil del problema, pero de muy buena precisión desde un punto de vista ingenieril, [Laura et al. \(1975\)](#).

Los métodos a desarrollar en la presente tesis son: Rayleigh-Ritz, Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM, sus siglas en inglés) y Elementos Finitos (FEM, sus siglas en inglés). Mientras que Rayleigh-Ritz y FEM resuelven el problema desde un punto de vista energético, GDQM aproxima la solución resolviendo las ecuaciones diferenciales gobernantes.

## 2.2 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

### 2.2.1 Introducción

El método energético de Rayleigh-Ritz fue introducido por Lord Rayleigh a fines de 1870 ([Rayleigh, 1877,1878](#)) y luego generalizado por Walther Ritz a principios del siglo XX ([Ritz, 1908,1909](#)). Se originó a partir de los intentos de calcular las frecuencias naturales y las formas modales de las estructuras ([Leissa, 2005](#)). Se utiliza ampliamente en varios campos de investigación, especialmente para la determinación de soluciones aproximadas de problemas de contorno, y/o de autovalores, que describen el comportamiento estático o dinámico de sistemas estructurales ([Grossi et al., 1994](#)). En los últimos treinta años, ha sido aplicado a una variedad de problemas estructurales, tales como: vibraciones de barras, vigas, placas, membranas; deflexión de vigas, pandeo de columnas y de placas, comportamiento estático de placas, torsión elástica, etc. ([Leissa y Qatu, 2011](#); [Ilanko y Monterrubio, 2014](#)).

### 2.2.2 Esencia del método

La metodología consiste básicamente en expresar la solución del funcional gobernante en términos de una sumatoria de funciones coordenadas (admisibles) multiplicadas por constantes arbitrarias. Estas funciones necesariamente deben satisfacer las condiciones de borde

esenciales o geométricas (estables); pero si además, cumplen con las condiciones de borde naturales (inestables), la aproximación que se logra es numéricamente mejor. Sin embargo, el principal inconveniente del método, es que no siempre es fácil encontrar funciones adecuadas que satisfagan ambas condiciones del problema (Rossi, 2007).

Seguidamente, el funcional de energía es minimizado con respecto a las constantes, originando un sistema de ecuaciones lineales que depende de cada una de ellas. Es decir, se obtiene como resultado un problema con un número finito de incógnitas descrito por ecuaciones algebraicas en lugar de ecuaciones diferenciales.

Para obtener los autovalores del problema, se aplica la condición de no-trivialidad al sistema y se obtiene la ecuación característica del problema, es decir, el determinante se iguala a cero. Las raíces de esta ecuación son cotas superiores de los autovalores exactos, (Ritz, 1908).

## 2.3 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA

### 2.3.1 Modelo

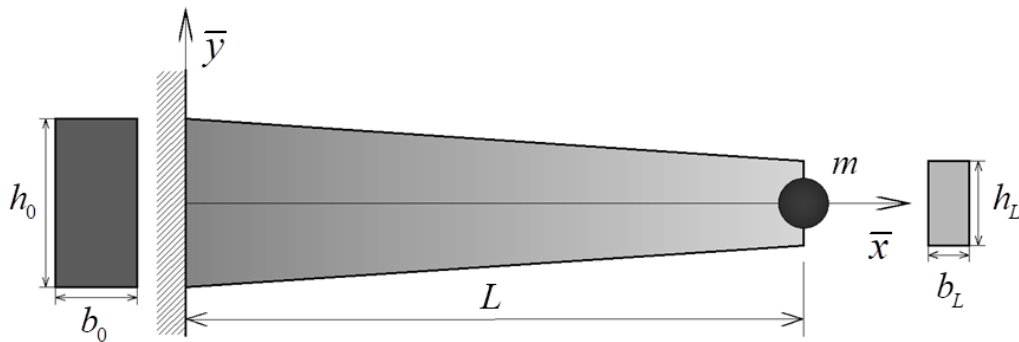


Figura 2.1: Viga cantiléver AFG Bernoulli-Euler de sección variable con masa adosada en el extremo libre.

Tal como se muestra en la Figura 2.1, el modelo considerado es una viga AFG Bernoulli-Euler en voladizo, de sección transversal de doble simetría (rectangular) variable en la dirección de su directriz y que lleva una masa concentrada  $m$  adosada en  $\bar{x} = L$ . Se considera al eje  $\bar{x}$  coincidente con el eje de la viga en la posición sin flexionar y al eje  $\bar{y}$  perpendicular al eje  $\bar{x}$ , con origen en el baricentro de la sección transversal inicial en el empotramiento. Además, se denota como  $h$  a la altura de la viga y  $b$  a su ancho. Las características geométricas en la sección inicial se referencian con el subíndice “0” ( $b_0$  y  $h_0$ ) y para el extremo derecho (en  $\bar{x} = L$ ) con el subíndice “L” ( $b_L$  y  $h_L$ ).

### 2.3.2 Propiedades del material (AFG)

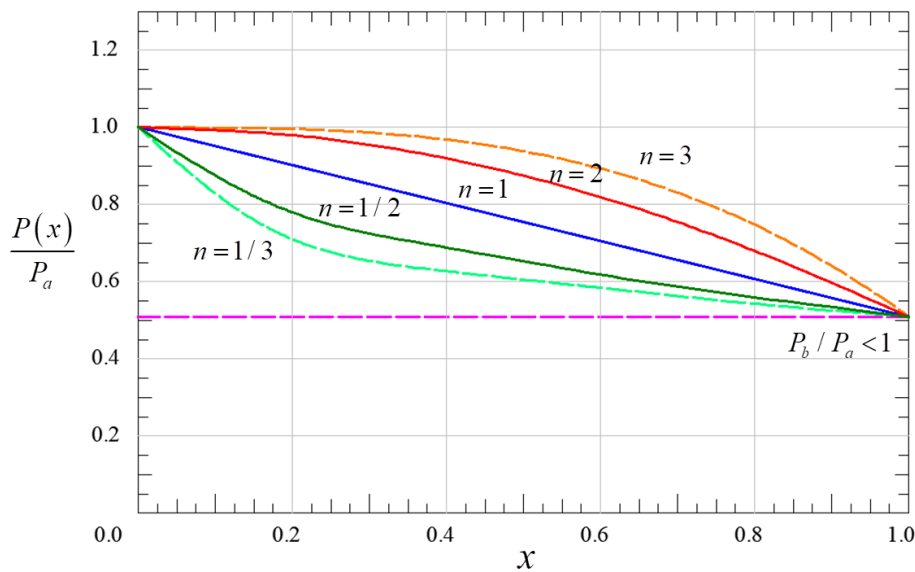


Figura 2.2: Ley de variación potencial.  $x = \bar{x}/L$ ;  $P_b/P_a < 1$ .

Se considera a la viga compuesta por un material heterogéneo, cuyas propiedades elásticas y de densidad en las secciones varían en la dirección axial por la combinación de dos materiales "a" y "b", según una ley preestablecida (Shahba et al., 2011a). Las primeras leyes potenciales, para considerar la variación de las propiedades de los materiales AFG, fueron establecidas por Wakashima et al. (1990).

Sea  $P(\bar{x})$  una propiedad genérica del material resultante, como  $E$  el módulo de Young y  $\rho$  la densidad de masa, en una sección transversal cualquiera habrá una combinación de las propiedades respectivas de los materiales constitutivos  $P_a$  y  $P_b$ .

Por ejemplo, se asume que las propiedades del material varían de acuerdo a una ley de variación potencial genérica  $P(\bar{x})$  a lo largo del eje  $\bar{x}$  (en la longitud  $L$  de la viga), como establece la Figura 2.2:

$$P(\bar{x}) = P_a + (P_b - P_a) \left( \frac{\bar{x}}{L} \right)^n ; \quad n \geq 0 \quad y \quad \bar{x} \in [0, L] \quad (2.1)$$

donde el exponente  $n$  es el parámetro de heterogeneidad del material en la viga.  $P_a$  y  $P_b$  son las propiedades del material "a" y "b", respectivamente.

Notar que en  $\bar{x} = 0$  la sección está enteramente constituida por el material "a", mientras que en  $\bar{x} = L$  lo es por el material "b". El contenido porcentual del material "a" a lo largo de la viga incrementa en la medida que  $n$  aumenta. Cuando  $n = 1$  la composición varía linealmente a lo largo de la longitud  $L$ , mientras que para  $n = 1/2$  o  $n = 2$  corresponde una variación

parabólica, y así sucesivamente. En general, cualquier valor de  $n$  fuera del rango  $[1/3; 3]$  no es deseado (Nakamura et al., 2000), debido a que el material AFG contendría demasiado de uno de los materiales constituyentes. (Cuando  $n = 1/3$  o  $n = 3$  uno de los materiales constituye el 75% del material AFG total).

### 2.3.3 Procedimiento analítico

Con el objetivo de determinar los coeficientes de las frecuencias naturales del sistema viga-masa, se asume que la deflexión de la viga  $v(\bar{x}, t)$  puede expresarse para sus modos normales de vibración, como:

$$v(\bar{x}, t) = \bar{V}(\bar{x}) \cos(\omega t) \quad (2.2)$$

donde  $\bar{V}(\bar{x})$  es la amplitud de desplazamiento (en la dirección del eje  $\bar{y}$ ),  $t$  es la variable temporal y  $\omega$  es la frecuencia natural circular de vibración transversal de la viga.

Para el desarrollo de los cálculos, se considera la adimensionalización global de la coordenada espacial  $\bar{x}$  y de la amplitud de desplazamiento  $\bar{V}(\bar{x})$  con respecto a la longitud  $L$  de la viga

$$x = \frac{\bar{x}}{L}; \quad V(x) = \frac{\bar{V}(\bar{x})}{L}. \quad (2.3)$$

Luego, para aplicar el método de Rayleigh-Ritz, es necesario aproximar la componente espacial de la solución como:

$$V(x) \equiv V_a(x) = \sum_{j=1}^{N_p} C_j \varphi_j(x) \quad (2.4)$$

donde  $\varphi_j$  son las funciones coordenadas multiplicadas por  $C_j$  constantes arbitrarias, y  $N_p$  es el número de términos a sumar. Para el modelo en análisis, viga en voladizo, se eligen las siguientes funciones coordenadas:

$$\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_p} = \{x^{j+1}\}_{j=1}^{N_p} \quad (2.5)$$

las cuales satisfacen las condiciones de borde esenciales de desplazamiento y giro nulo en el empotramiento:  $\varphi|_{x=0} = \varphi'|_{x=0} = 0$ .

Seguidamente, se introduce el funcional de energía  $J$  del problema de vibraciones en vigas; el cual viene dado en términos de las máximas energías de deformación  $U_{máx}$  y cinética  $T_{máx}$  (Laura, 1995):



$$J = U_{m\acute{a}x} - T_{m\acute{a}x} . \quad (2.6)$$

La expresi3n de la energa máxima de deformaci3n  $U_{m\acute{a}x}$ , para la teoría de vigas de Bernoulli-Euler, en su forma adimensionalizada es:

$$U_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{E(x)I(x)}{L} \left( \frac{d^2 V_a(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.7)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la secci3n transversal con respecto al eje de flexi3n.

Por otra parte, la expresi3n de la energa cinética máxima  $T_{m\acute{a}x}$ , adimensionalizada e independizada de la variable temporal  $t$ , es:

$$T_{m\acute{a}x} = T_{m\acute{a}x(1)} + T_{m\acute{a}x(2)} \quad (2.8)$$

donde el primer término, es debido a la energa propia de la viga:

$$T_{m\acute{a}x(1)} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^1 \rho(x) A(x) L^3 (V_a(x))^2 dx \quad (2.9)$$

con  $A$  como el área de la secci3n transversal. Y el segundo término, corresponde a la energa cinética que introduce, al sistema, el hecho de considerar una masa puntual adosada:

$$T_{m\acute{a}x(2)} = \frac{1}{2} \omega^2 \left( m L^2 \left( V_a(x) \Big|_{x=x_m} \right)^2 + m r_g^2 \left( \frac{dV_a(x)}{dx} \Big|_{x=x_m} \right)^2 \right). \quad (2.10)$$

El primer término del paréntesis, en la Ec. (2.10), corresponde al efecto de la inercia traslacional de la masa y el segundo al de la inercia rotacional.  $r_g$  es el radio de giro de la masa  $m$  adosada, con respecto al eje de flexi3n de la viga y  $x_m$  es la posici3n donde est ubicada. En la [Figura 2.3](#) se da una idea gráfica de lo antes mencionado.

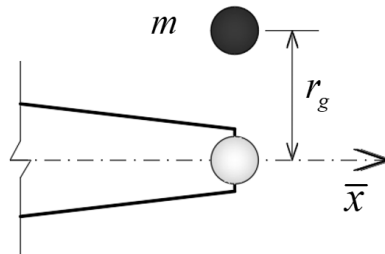


Figura 2.3: Efecto de la inercia rotacional de la masa puntual adosada.

El hecho de considerar que la viga, además de las propiedades del material, posea características geométricas variables, requiere definir una expresi3n genérica  $R(x)$  que

contemple ambas variaciones:

$$R(x) = R_0 f_R(x) \quad (2.11)$$

donde  $R(x)$  representa una característica de la viga (geométrica o del material) que varía en la dirección axial de la misma, desde un valor inicial  $R_0$  y según una distribución  $f_R(x)$ . Adoptando la ley de variación axial asimétrica de la Ec. (2.1), entonces:

$$R(x) = R_0 \left( 1 + \left( \frac{R_L}{R_0} - 1 \right) x^n \right) \text{ con } f_R(x) = \left( 1 + \left( \frac{R_L}{R_0} - 1 \right) x^n \right) \text{ para } x \in [0,1] \text{ y } n \geq 0, \quad (2.12)$$

de esta manera se puede describir a:

$$\begin{aligned} E(x) &= E_0 f_E(x) & \rho(x) &= \rho_0 f_\rho(x) & A(x) &= A_0 f_A(x) & I(x) &= I_0 f_I(x) \\ b(x) &= b_0 f_b(x) & h(x) &= h_0 f_h(x) & f_A(x) &= f_b(x) \times f_h(x) & f_I(x) &= f_b(x) \times (f_h(x))^3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Las formas de  $f_A(x)$  y  $f_I(x)$  se deben a que la sección transversal es rectangular y maciza. Vale resaltar que en la Ec. (2.12), el coeficiente  $n$  pasa a tener un doble efecto. Es decir, permite considerar la heterogeneidad del material y, además, describir la forma en que varía cualquier parámetro geométrico de la sección transversal a lo largo de la viga.

Reemplazando las Ecs. (2.7), (2.9) y (2.10) en la Ec. (2.6), se obtiene:

$$J[V_a(x)] = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \frac{E(x)I(x)}{L} (V_a'')^2 dx - \omega^2 \left[ \int_0^1 \rho(x)A(x)L^3 (V_a)^2 dx + mL^2 (V_a|_{x=x_m})^2 + mr_g^2 (V_a'|_{x=x_m})^2 \right] \right\} \quad (2.14)$$

Considerando las Ecs. (2.13) y  $x_m = 1$  para el modelo (Figura 2.1), el funcional puede escribirse como:

$$J[V_a(x)] = \frac{E_0 I_0}{2L} \times \left\{ \int_0^1 f_E f_I (V_a'')^2 dx - \Omega^2 \left[ \int_0^1 f_\rho f_A (V_a)^2 dx + M \left( (V_a|_{x=1})^2 + c_m^2 (V_a'|_{x=1})^2 \right) \right] \right\} \quad (2.15)$$

con

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_0 A_0}{E_0 I_0}}, \quad M = \frac{m}{\rho_0 A_0 L}, \quad c_m = \frac{r_g}{L}, \quad V_a' = \frac{dV_a}{dx}, \quad V_a'' = \frac{d^2 V_a}{dx^2}$$

donde  $\Omega$  son los coeficientes de frecuencia y  $M$  es el coeficiente de masas que relaciona la masa puntual  $m$  con la masa de una viga de material homogéneo y de sección transversal constante (ambos parámetros asociados a la sección trasversal inicial).

A continuación, el funcional  $J$  es minimizado respecto de cada constante arbitraria

$$\frac{\partial J[V_a(x)]}{\partial C_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_p \quad (2.16)$$

dando origen a un sistema de ecuaciones lineales , que escrito en forma matricial es:

$$\left( \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N_p} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N_p 1} & k_{N_p 2} & \dots & k_{N_p N_p} \end{bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N_p} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N_p 1} & m_{N_p 2} & \dots & m_{N_p N_p} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_{N_p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

En forma simbólica, este sistema también puede expresarse como:

$$\mathbf{R}\{C_j\} = \{0\} \quad (2.18)$$

con

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}$  son las matrices de rigidez y de masa, respectivamente. De acuerdo con la Ec. (2.17), estas matrices, están expresadas en término de los elementos  $k_{ij}$  y  $m_{ij}$ ; y para la viga AFG Bernoulli-Euler con masa adosada en el extremo libre, adoptan las siguientes formas:

$$k_{ij} = \int_0^1 f_E(x) f_I(x) \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad (2.20)$$

$$m_{ij} = \int_0^1 f_\rho(x) f_A(x) \varphi_i \varphi_j dx + M \left( \varphi_i \Big|_{x=1} \varphi_j \Big|_{x=1} + c_m^2 \left( \varphi_i' \Big|_{x=1} \varphi_j' \Big|_{x=1} \right) \right) \quad (2.21)$$

Al ser la Ec. (2.17), un sistema homogéneo de ecuaciones lineales (términos independientes nulos), para que el movimiento vibratorio sea posible, es necesario y suficiente cumplir con la condición de que el determinante de la matriz  $\mathbf{R}$  (Ec. (2.19)) sea igual cero. El desarrollo de este determinante conduce a la ecuación algebraica de coeficientes de frecuencia (o ecuación característica) del sistema, que es un polinomio de grado  $N_p$  con  $\Omega^2$  como incógnita.

Finalmente, el problema de autovalores puede ser expresado como:

$$|\mathbf{KM}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{I}| = |\mathbf{B} - \zeta \mathbf{I}| = 0 \quad (2.22)$$

con  $\zeta = \Omega^2$  como los autovalores de la matriz  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{I}$  la matriz identidad.

## 2.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Parte de los resultados que conforman este capítulo, pueden encontrarse publicados en el trabajo de [Gilardi et al. \(2015\)](#).

### 2.4.1 Análisis de convergencia

Antes de encarar el análisis de cualquier problema, resulta indispensable desarrollar un

estudio de convergencia del método a emplear. Contar con una base bibliográfica que permita contrastar los resultados obtenidos, es muy valioso; sin embargo a menudo esto no sucede. Entonces, primero se recurre a analizar casos simples y posteriormente más complejos.

El correspondiente análisis de convergencia del método de Rayleigh-Ritz, se realiza para una viga en voladizo, de sección transversal rectangular constante y de material homogéneo; que además, considera la existencia de una masa puntal adosada en el extremo libre. Este modelo fue planteado por [Maiz \(2006\)](#), quien obtuvo los primeros cinco coeficientes de frecuencia en forma exacta, para un coeficiente de masas igual a la unidad ( $M = 1$ ) e inercia rotacional ( $c_m$ ) variable.

La [Tabla 2.1](#), muestra los resultados del correspondiente análisis.

$c_m$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$N_p$	Solución
0	1.55730	16.2504	51.3743	109.719	366.239	5	M.R-Ritz  (Maiz, 2006)
	1.55730	16.2501	50.8958	105.199	179.250	10	
	1.55730	16.2501	50.8958	105.198	179.232	15	
	1.55730	16.2501	50.8958	105.198	179.232		
0.01	1.55716	16.2175	51.0625	108.317	281.354	5	M.R-Ritz  (Maiz, 2006)
	1.55716	16.2171	50.6037	103.954	175.524	10	
	1.55716	16.2171	50.6037	103.954	175.507	15	
	1.55716	16.2171	50.6037	103.954	175.507		
0.02	1.55675	16.1186	50.1024	103.693	198.659	5	M.R-Ritz  (Maiz, 2006)
	1.55675	16.1183	49.7012	99.8223	162.314	10	
	1.55675	16.1183	49.7012	99.8220	162.301	15	
	1.55675	16.1183	49.7012	99.8220	162.301		
0.05	1.55388	15.4310	43.3872	80.1468	139.466	5	M.R-Ritz  (Maiz, 2006)
	1.55388	15.4307	43.2558	78.0056	130.349	10	
	1.55388	15.4307	43.2558	78.0056	130.346	15	
	1.55388	15.4307	43.2558	78.0056	130.346		
0.1	1.54368	13.2398	32.0803	68.4488	132.032	5	M.R-Ritz  (Maiz, 2006)
	1.54368	13.2396	32.0696	66.8287	124.419	10	
	1.54368	13.2396	32.0696	66.8287	124.416	15	
	1.54368	13.2396	32.0696	66.8287	124.416		

Tabla 2.1: Coeficientes de frecuencia para viga la cantiléver homogénea, de sección constante y con masa adosada ( $M = 1$ ,  $c_m$ : variable) en el extremo libre ( $x_m = 1$ ).

Se comprueba que el grado de convergencia decae con el orden del coeficiente de frecuencia. Para reproducir la solución exacta con seis dígitos se requirieron 5 términos para  $\Omega_1$ , 10 términos para  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ ; y 15 términos para  $\Omega_4$  y  $\Omega_5$ . Si bien con  $N_p = 15$  ya se obtiene una solución aceptable, con el fin de contemplar las futuras complejidades del modelo y brindar una excelente aproximación desde el punto de vista ingenieril, se decide adoptar  $N_p = 20$

términos de funciones coordenadas para el análisis de los próximos casos.

## 2.4.2 Comparación con la literatura

Al no encontrar, en la literatura técnica, valores de coeficientes de frecuencia naturales para vibración de vigas AFG con masas adosadas; resulta necesario verificar la precisión del modelo propuesto mediante comparaciones con casos particulares disponibles en la literatura.

### 2.4.2.1 Viga cantiléver AFG

En primer lugar, en la [Tabla 2.2](#) se compara con una viga AFG Bernoulli-Euler de sección transversal rectangular y ahusada, la cual fue estudiada por los investigadores [Shahba et al. \(2011b\)](#) empleando FEM y por [Shahba y Rajasekaran \(2012\)](#) empleando el método de transformada diferencial (DTM, sus siglas en inglés). Estos autores no definieron un material AFG en particular, sino que adoptaron (para sus cálculos) las distribuciones polinómicas, para el módulo de elasticidad  $E$  y la densidad de masa  $\rho$ , que implementaron Elishakoff y sus colaboradores ([Elishakoff y Candan, 2001](#)).

De acuerdo con el modelo actual, el caso en consideración puede representarse adoptando en las Ecs. (2.13), las siguientes funciones de distribución:

$$f_b = 1 - c_b x \quad y \quad f_h = 1 - c_h x \quad \text{con} \quad c_b = 1 - \frac{b_L}{b_0} \quad y \quad c_h = 1 - \frac{h_L}{h_0} \quad (2.23)$$

para la geometría, y para las propiedades del material AFG:

$$f_\rho = 1 + x + x^2 \quad y \quad f_E = 1 + x. \quad (2.24)$$

En la [Tabla 2.2](#), se exponen los primeros 2 coeficientes de frecuencia calculados. Se observa que los resultados concuerdan satisfactoriamente con los trabajos comparados.

$c_b$	0		0.2		0.4		0.6		0.8		Sol.
$c_h$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	
0	2.42556	18.6041	2.60542	19.0041	2.85075	19.5303	3.21368	20.2958	3.83105	21.6759	R-Ritz
	2.4256	18.6041	2.6054	19.0041	2.8507	19.5303	3.2137	20.2958	3.8310	21.6759	<a href="#">Shahba</a>
0.2	2.50506	17.3802	2.68633	17.7501	2.93357	18.2379	3.29935	18.9501	3.92194	20.2432	R-Ritz
	2.5051	17.3801	2.6863	17.7501	2.9336	18.2379	3.2993	18.9501	3.9219	20.2432	<a href="#">Shahba</a>
0.4	2.61547	16.0705	2.79874	16.4092	3.04857	16.8571	3.4181	17.5139	4.04714	18.7164	R-Ritz
	2.6155	16.0705	2.7987	16.4092	3.0486	16.8571	3.4181	17.5139	4.0471	18.7164	<a href="#">Shahba</a>
0.6	2.78355	14.6508	2.96994	14.9567	3.22368	15.3627	3.59847	15.9616	4.23553	17.0694	R-Ritz
	2.7836	14.6508	2.9699	14.9567	3.2236	15.3627	3.5985	15.9616	4.2355	17.0694	<a href="#">Shahba</a>
0.8	3.08711	13.1142	3.27943	13.3849	3.54015	13.7466	3.92322	14.2848	4.56946	15.2954	R-Ritz
	3.0871	13.1142	3.2794	13.3849	3.5401	13.7466	3.9232	14.2848	4.5695	15.2955	<a href="#">Shahba</a>

Tabla 2.2: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG de sección ahusada, sin masa ( $M = 0$ ).

### 2.4.2.2 Viga cantiléver homogénea con masa

En segundo lugar, se compara una viga en voladizo homogénea, de sección transversal uniforme y con una masa puntal adosada en el extremo libre. Este caso, fue estudiado por [Rossit y Laura \(2001\)](#), quienes obtuvieron los autovalores del sistema  $(\beta_i = \sqrt[4]{\rho_0 A_0 / E_0 I_0} \omega_i^{1/2} L)$  mediante la solución exacta de la ecuación diferencial. Entonces, para obtener los coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$ , basta con cuadrar dichos autovalores,  $\Omega_i = (\beta_i)^2$ .

Estos autores consideraron diferentes coeficientes de masa  $M$ , pero sin contemplar la inercia rotacional de la misma ( $c_m = 0$ ). Esto puede justificarse en que la teoría de Bernoulli-Euler no contempla el efecto de la inercia rotacional de la sección transversal de la viga, entonces es coherente plantear solo el efecto de la inercia traslacional para la masa.

Se aprecia, en la [Tabla 2.3](#), los valores calculados y que la concordancia es excelente con los resultados propios.

$M$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	5.0	Solución
$\Omega_1$	2.61275	2.16799	1.89247	1.70065	1.55730	1.44497	1.35387	0.756937	M.R-Ritz
	2.61275	2.16799	1.89247	1.70065	1.55730	1.44497	1.35387	0.756937	<a href="#">Rossit y Laura (2001)</a>
$\Omega_2$	18.2078	17.1763	16.7007	16.4275	16.2501	16.1257	16.0337	15.6023	M.R-Ritz
	18.2081	17.1763	16.7003	16.4275	16.2501	16.1257	16.0337	15.6025	<a href="#">Rossit y Laura (2001)</a>
$\Omega_3$	53.5585	52.0633	51.4450	51.1079	50.8958	50.7501	50.6437	50.1624	M.R-Ritz
	53.5590	52.0633	51.4450	51.1079	50.8958	50.7501	50.6437	50.1624	<a href="#">Rossit y Laura (2001)</a>
$\Omega_4$	108.193	106.457	105.781	105.422	105.198	105.046	104.935	104.446	M.R-Ritz
	108.202	106.461	105.781	105.411	105.206	105.042	104.940	104.448	<a href="#">Rossit y Laura (2001)</a>
$\Omega_5$	182.431	180.545	179.833	179.461	179.233	179.078	178.966	178.468	M.R-Ritz
	182.439	180.553	179.828	179.453	179.239	179.078	178.971	178.463	<a href="#">Rossit y Laura (2001)</a>

Tabla 2.3: Coeficientes de frecuencia para viga cantiléver homogénea de sección constante, con  $M$  : variable  $c_m = 0$ , en el extremo libre ( $x_m = 1$ ).

### 2.4.3 Casos propuestos

En la ingeniería existen diversas circunstancias tecnológicas en las que se evidencia la presencia de masas adosadas sobre una estructura resistente bajo un entorno vibratorio, ya sea vigas que soportan equipos electromecánicos, componentes electrónicos montados sobre plaquetas de circuitos impresos, etc. Ahora bien, cuando un motor está en funcionamiento, este es capaz de introducir tensiones dinámicas severas en el elemento estructural al que se encuentra solidario, por lo cual resulta primordial para el ingeniero predecir las frecuencias naturales del sistema elemento-motor (viga-masa acoplada), con el fin de obtener un diseño apropiado de los elementos estructurales.

La motivación de implementar materiales AFG en estas circunstancias, se fundamenta en evitar el conocido fenómeno de resonancia. Específicamente, lo que se busca es rigidizar dinámicamente a la viga, es decir, elevar las frecuencias naturales de la viga (principalmente la frecuencia fundamental) para alejarlas de las frecuencias operativas del equipo adosado.

Debido a la cantidad y variabilidad de parámetros, que intervienen en la descripción del comportamiento dinámico de este tipo de estructuras, podrían generarse infinidad de casos. Con el objetivo de demostrar la conveniencia del procedimiento, y acotar ese espectro de posibilidades, es que se establecen las siguientes pautas:

- 1) Elegir un material AFG.
- 2) Establecer un patrón de referencia.
- 3) Evaluar la influencia del material AFG sobre los coeficientes de frecuencia.
- 4) Evaluar la influencia de la geometría sobre los coeficientes de frecuencia.
- 5) Optimizar la solución de los puntos 3) y 4).

#### 2.4.3.1 Elección del material AFG

El material AFG elegido para el desarrollo de los cálculos de esta tesis, es el propuesto por [Su et al. \(2013\)](#). El mismo está constituido por dos materiales, un metal: acero (Ac) y un no metal: alúmina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). En la [Tabla 2.4](#), además de exponer las propiedades, se pone en evidencia que la alúmina es un material mucho más rígido y más liviano que el acero.

Material	Módulo de Young	Densidad	Relaciones
Acero (Ac)	$E_{\text{Ac}} = 210 \text{ GPa}$	$\rho_{\text{Ac}} = 7800 \text{ kg/m}^3$	$E_{\text{Alum}} / E_{\text{Ac}} = 1.857$
Alúmina (Alum)	$E_{\text{Alum}} = 390 \text{ GPa}$	$\rho_{\text{Alum}} = 3960 \text{ kg/m}^3$	$\rho_{\text{Alum}} / \rho_{\text{Ac}} = 0.508$

Tabla 2.4: Propiedades del material AFG empleado ([Su et al., 2013](#)).

#### 2.4.3.2 Patrón de comparación

De acuerdo con el desarrollo realizado precedentemente, los coeficientes de frecuencia  $\Omega$  y de masa  $M$ , dependen tanto de las características geométricas ( $b_0, h_0$ ) como de las propiedades del material ( $E_0, \rho_0$ ), que constituyen a la sección transversal inicial. Esto incita, indudablemente, a establecer una viga patrón con la cual poder comparar todos los resultados. Para tal fin, es que se considera como referencia a una viga homogénea de acero (Ac) de sección transversal constante,  $A = A_0 = b_0 \times h_0$  y  $I = I_0 = (b_0 \times h_0^3) / 12$ . Luego:

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{Ac} A_0}{E_{Ac} I_0}} \text{ y } M = \frac{m}{\rho_{Ac} A_0 L}. \quad (2.25)$$

Para la composición a) Ac-Alum los coeficientes ya están referenciados al acero. Sin embargo, en la composición b) Alum-Ac se deben hallar valores equivalentes para los coeficientes de frecuencia y de masa, para poder contrastar los resultados.

### 2.4.3.3 Rigidización dinámica mediante material

Para rigidizar la viga, se pretende que la alúmina, más rígida y más liviana que el acero, predomine en las regiones de la viga con mayor curvatura (mayor momento flector) y desplazamiento. Debido a que la rigidez de este material aumenta la energía de deformación y su reducido peso disminuye el efecto inercial; en consecuencia, las frecuencias naturales aumentan.

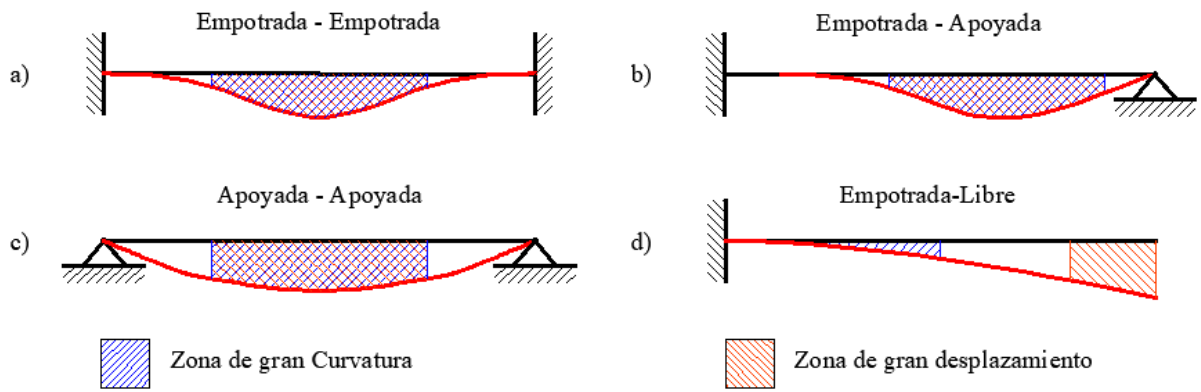


Figura 2.4: Zonas de la viga a rigidizar con material AFG.

Esto se logra de manera muy simple en vigas con extremos restringidos de desplazarse (simplemente apoyados, empotrados), donde las zonas de mayor curvatura y mayor desplazamiento convergen alrededor de la franja central de la viga, [Bambill y Rossit \(2014\)](#), tal como se aprecia en la [Figura 2.4](#).

Para el caso de la viga en voladizo, la zona de máxima curvatura se encuentra en cercanías del extremo empotrado y la de máximo desplazamiento sobre el extremo libre.

Con el fin de evaluar la influencia de la composición del material, en las vigas en voladizo, se analiza una viga AFG de sección transversal uniforme, con una masa  $m$  adosada en el extremo libre. La distribución de las propiedades de los materiales se considera de acuerdo con la Ec. (2.12) adoptando  $n = 0.5, 1, 2$ . En la [Tabla 2.6](#), se exploran dos posibilidades citadas anteriormente: composición a) Ac-Alum y composición b) Alum-Ac.



$n$	$M$	$c_m$	Var. Material	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0.5	0	0	a) Ac-Alum	5.39945	33.7971	94.2409	184.495	304.868
			b) Alum-Ac	4.41565	27.1174	75.8533	148.691	245.888
	0.5	0.1	a) Ac-Alum	2.51893	21.6064	53.2053	104.536	191.062
			b) Alum-Ac	2.43734	17.6637	43.1348	85.1630	155.276
	1	0.2	a) Ac-Alum	1.83544	12.0443	37.9263	96.3802	186.243
			b) Alum-Ac	1.81445	9.74238	31.0121	78.3109	150.899
1	0	0	a) Ac-Alum	4.84848	30.1831	84.4216	165.366	273.306
			b) Alum-Ac	4.78429	30.0155	84.1921	165.098	273.015
	0.5	0.1	a) Ac-Alum	2.33166	19.7077	49.5917	95.0656	171.892
			b) Alum-Ac	2.60079	19.0776	46.1623	93.2517	171.569
	1	0.2	a) Ac-Alum	1.70649	11.4947	34.3958	86.4294	166.878
			b) Alum-Ac	1.93029	10.1654	33.8939	86.5789	167.234
2	0	0	a) Ac-Alum	4.39522	26.9186	75.7360	148.515	245.538
			b) Alum-Ac	5.14207	33.6746	94.2766	184.475	304.664
	0.5	0.1	a) Ac-Alum	2.18947	17.8108	46.2175	86.9542	155.169
			b) Alum-Ac	2.73305	20.8706	49.8748	103.043	190.762
	1	0.2	a) Ac-Alum	1.60979	10.8317	31.4228	77.7807	149.886
			b) Alum-Ac	2.02176	10.6942	37.5937	96.5869	186.479

Tabla 2.6: Coeficientes de frecuencia para viga cantiléver AFG de sección constante,  $M$ : variable en  $x_m = 1$ .

Seguidamente, en la [Figura 2.5](#) se gráfica la distribución de las propiedades para las composiciones a) y b) del material AFG, para entender conceptualmente y complementar el análisis de la [Tabla 2.6](#).

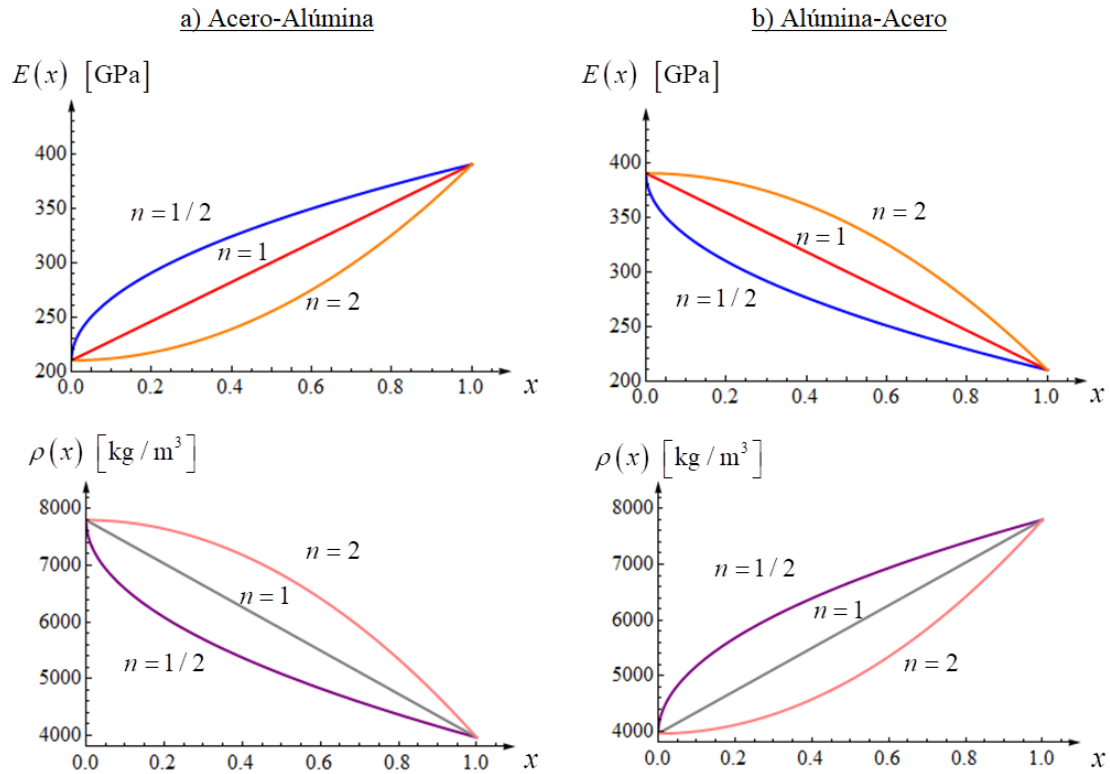


Figura 2.5: Distribución de las propiedades del material AFG (composiciones a) y b)) a lo largo de la viga, con ley de variación axial asimétrica (Ec. (2.12)).

Se debe tener en claro que la variación de la rigidez ( $E(x)I$ ) del material influirá en la energía de deformación de la viga (Ec. (2.7)) y que la variación de la masa de la viga ( $\rho(x)A$ ) por unidad de longitud, lo hará sobre su energía cinética (Ec. (2.9)). De esta manera, los valores de los coeficientes de frecuencia  $\Omega$  se asocian entonces, a la relación que existe entre dichas energías, más concretamente a la relación  $\mathbf{K}/\mathbf{M}$ , Ec. (2.21). Por lo tanto, en la medida que la relación aumente, los coeficientes de frecuencia también lo harán, o viceversa.

De la [Tabla 2.6](#) y la [Figura 2.5](#), se pueden obtener las siguientes conclusiones:

En todos los casos analizados, cuando se adosa una masa en la viga, se aprecia una disminución en los coeficientes de frecuencia, debido a que la energía cinética aumenta (Ec. (2.10)). Cuanto más grande es la masa, más influye en la disminución de los mismos.

Si se adopta la composición a) Ac-Alum, la viga se rigidiza dinámicamente más cuando la ley de variación de las propiedades lo hace con exponente  $n = 1/2$ , o bien para todo  $n < 1$ , exista o no masa adosada en el extremo libre. Esto se justifica dado que en la composición a) el módulo de Young del material AFG aumenta más rápidamente en las cercanías del empotramiento, brindándole a la viga una mayor rigidez en la zona de mayor curvatura ([Figura 2.4.d](#)) y consecuentemente disminuyendo los desplazamientos en el tramo de la viga. En el extremo libre (donde se adosa la masa puntual) esto influye sobre la energía cinética que aporta la masa adosada, en la zona de mayor desplazamiento ([Figura 2.4.d](#)). En cuanto a la variación de la densidad, se puede apreciar que la masa de la viga decrece más rápidamente hacia el extremo libre (en relación a  $n = 1$ ); por ende la viga aporta menos energía cinética.

En cambio, si se adopta la composición b) Alum-Ac, la viga se rigidiza dinámicamente más cuando la ley de variación de las propiedades tiene exponente  $n = 2$ , o bien para todo  $n > 1$ . Esto se explica dado que en la composición b) el módulo de Young de la viga AFG decrece más lentamente en las cercanías del empotramiento, rigidizando a la viga más que para  $n = 1$  (en la misma composición), por lo cual los desplazamientos en el tramo de la viga disminuyen. En cuanto a la variación de la densidad, se aprecia que masa crece más lentamente hacia el extremo libre (respecto a  $n = 1$ ), por lo cual la viga aporta menos energía cinética.

El caso en que  $n = 1$ , es un caso particular. Por lo cual, se analiza el efecto que tiene considerar este exponente en la variación de las propiedades en las composiciones a) y b). Se aprecia que cuando ( $M = 0$ ) los coeficientes de frecuencia son prácticamente los mismos, aunque la composición a) manifiesta una leve rigidización, independientemente del orden en que estén dispuestos los materiales constitutivos del material de AFG. Sin embargo, cuando se adosa la masa, el coeficiente de frecuencia fundamental aumenta más para la composición b).

Los demás coeficientes permanecen cercanos, fluctuando por encima y por debajo de los valores que brinda la composición a).

#### 2.4.3.4 Rigidización dinámica mediante geometría

Se considera una viga en voladizo homogénea de ancho constante  $b=b_0$  y de altura  $h$  variable de acuerdo con la Ec. (2.12) y para tres valores de exponente  $n$  ( $n=0.5, 1$  y  $2$ ). En el extremo libre posee adosada una masa puntual, para la cual se estudian los casos:  $M=0.5$  con  $c_m=0.1$  y  $M=1$  con  $c_m=0.2$ , para las distintas relaciones de altura propuestas.

Los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos se encuentran en la Tabla 2.7. En la cual, se aprecia que los mayores coeficientes de frecuencia se generan cuando la altura  $h$  de viga varía de manera cuadrática (con  $n=2$  de acuerdo a la Ec. (2.12)).

$n$	$\frac{h_L}{h_0}$	$M$	$c_m$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0.5	0.8	0.5	0.1	1.78384	12.7530	30.5471	60.0981	109.465
		1	0.2	1.31463	7.01143	22.0272	55.4379	106.553
	0.6	0.5	0.1	1.53841	10.3033	23.4667	49.0580	91.1112
		1	0.2	1.10769	5.15302	18.1300	46.4610	89.4484
	0.4	0.5	0.1	1.25315	7.45078	16.7483	38.2350	72.1966
		1	0.2	0.87456	3.32872	14.2801	37.0988	71.4352
	0.2	0.5	0.1	0.89761	3.91033	10.8674	27.1203	51.7044
		1	0.2	0.58944	1.60795	10.2991	26.8309	51.4948
1	0.8	0.5	0.1	1.90355	13.2154	31.2917	61.7901	112.965
		1	0.2	1.40403	7.23201	22.5715	57.1066	110.034
	0.6	0.5	0.1	1.77725	11.1235	24.7368	52.3270	97.8941
		1	0.2	1.28118	5.51179	19.1703	49.6936	96.1961
	0.4	0.5	0.1	1.60504	8.43140	18.3748	42.9372	81.9568
		1	0.2	1.11949	3.73096	15.7597	41.7549	81.1530
	0.2	0.5	0.1	1.33696	4.68944	12.7796	33.0209	63.9394
		1	0.2	0.86190	1.95713	12.1359	32.6906	63.6969
2	0.8	0.5	0.1	1.98827	13.6980	32.1192	63.4801	116.512
		1	0.2	1.47165	7.49670	23.0459	58.7078	113.534
	0.6	0.5	0.1	1.96190	12.0218	26.1118	55.5972	104.895
		1	0.2	1.42547	5.94719	20.0687	52.8406	103.120
	0.4	0.5	0.1	1.91157	9.57968	20.0263	47.6912	92.2991
		1	0.2	1.35162	4.21289	17.0338	46.3822	91.4089
	0.2	0.5	0.1	1.79995	5.65217	14.5755	39.1389	77.4703
		1	0.2	1.18085	2.34140	13.7177	38.7087	77.1611

Tabla 2.7: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea de sección ahusada, ancho constante  $b=b_0$  y de altura  $h$  variable de acuerdo con la Ec. (2.12) y  $n=0.5, 1$  y  $2$ . Con masa  $M=0.5$  y  $1$  en  $x_m=1$ .

Al graficar la variación de la altura en función del exponente  $n$ , [Figura 2.6](#), se ve claramente que para  $n = 2$ , sin considerar la sección inicial y final que son iguales para todos los casos, la viga posee mayor sección transversal en toda de su longitud. Esto genera una mayor rigidez y un mayor peso en comparación a las demás; sin embargo, el efecto de rigidización por forma es mayor que el aumento de peso. En términos energéticos, esto se traduce en que la energía de deformación es mayor a la energía cinética, lo cual produce coeficientes de frecuencia más altos.

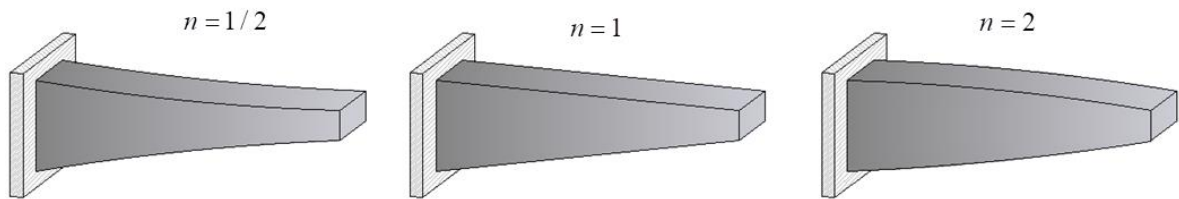


Figura 2.6: Variación de la altura en función del exponente  $n$ .

#### 2.4.3.5 Rigidización con material y geometría

Después de analizar los resultados obtenidos anteriormente, se considera el caso de mayor rigidización dinámica. El mismo se obtiene de combinar: sección transversal con altura  $h$  variando parabólicamente con  $n = 2$  y distribución b) del material AFG con  $n = 2$ , de acuerdo a la Ec. (2.12).

En la [Tabla 2.8](#), se muestran los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos. En comparación a los valores indicados en la [Tabla 2.7](#), se puede apreciar que aumentan notablemente, al introducir el material AFG en la viga ahusada. El aumento es del 30% en el primer coeficiente de frecuencia para todas las situaciones, un 20% para el segundo y un 40% en el resto de los coeficientes calculados. Además, se debe señalar que este aumento en los coeficientes de frecuencia va acompañado de una disminución en el peso de la viga.

$\frac{h_L}{h_0}$	$M$	$c_m$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0.8	0.5	0.1	2.69731	18.4615	42.2355	92.3310	174.045
	1	0.2	1.96473	8.80893	33.5302	88.0809	171.154
0.6	0.5	0.1	2.63894	15.4119	34.6654	81.4828	156.277
	1	0.2	1.88384	6.80750	29.3820	78.9756	154.511
0.4	0.5	0.1	2.53820	11.3894	27.5052	70.1367	136.702
	1	0.2	1.75310	4.71313	25.0127	68.8978	135.791
0.2	0.5	0.1	2.32486	6.20027	20.8195	57.3133	113.373
	1	0.2	1.43270	2.65630	20.0390	56.8872	113.050

Tabla 2.8: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac) de altura  $h$  variable ( $n = 2$ ), con  $M = 0.5$  y  $M = 1$  en  $x_m = 1$ .

## 2.5 REFERENCIAS

- Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Vibraciones libres de viga de sección variable construidas con material funcionalmente graduado. *Actas XXXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Montevideo, Uruguay*, 2014.
- Elishakoff, I. y Candan, S., Apparently First Closed-Form Solution for Vibrating: Inhomogeneous Beams. *In International Journal of Solids and Structures*, 38(9):3411-3441, 2001.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Free vibrations of an axially functionally graded beam with a concentrated mass. *1st. Pan-American Congress on Computational Mechanics (PANACM 2015)*, 410-421. CIMNE, 2015.
- Grossi, R. O. y Aranda, A., Consideraciones sobre una variante del Método de Rayleigh. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 10(3):163-171, 1994.
- Ilanko, S., Monterrubio, L.E. y Mochida, Y., *The Rayleigh-Ritz Method for Structural Analysis*. Wiley & Sons, 2014.
- Laura, P.A.A., Diez, L. y Gianetti C.E., *Métodos Aproximados en la Mecánica Aplicada*. Patagón, 1975.
- Laura, P.A.A., Optimization of Variational Methods. *Ocean Engineering*, 22(3):235–250, 1995.
- Leissa, A.W., The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*, 287:961-978, 2005.
- Leissa, A.W. y Qatu, M.S., *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill, 2011.
- Lord Rayleigh J.W.S., *The Theory of Sound*. The Macmillan Company, 1, 1877. (Reprinted 1945 by Dover Publications, New York).
- Lord Rayleigh J.W.S., *The Theory of Sound*. The Macmillan Company, 2, 1878. (Reprinted 1945 by Dover Publications, New York).
- Maiz, S., *Influencia de la inercia rotacional de una masa sobre las vibraciones transversales libres de elementos estructurales considerando diversas condiciones de apoyo*. Tesis de Magister en Ingeniería, 2006.
- Nakamura, T., Wang, T. y Sampath, S., Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation. *Acta Materialia*, 48:4293–4306, 2000.
- Ritz, W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik. *Journal für Reine und Angewandte Mathematik*, 135:1–61, 1908.

- Ritz, W., Theorie der Transversalschwingungen einer quadratische Platte mit freien Rändern. *Annalen der Physik*, 28:737–786, 1909.
- Rossi, R.E., *Introducción al Análisis de Vibraciones con el Métodos de Elementos Finitos*. Edi UNS, 2007.
- Rossit, C.A. y Laura, P.A.A., Free vibrations of a cantilever beam with a spring–mass system attached to the free end. *Ocean Engineering*, 28:933–939, 2001.
- Shahba, A., Attarnejad R., y Hajilar, S., Free vibration and stability of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler beams. *Shock and Vibration*, 18: 683–696, 2011b.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. y Hajilar, S., Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part B*, 42:801–808, 2011a.
- Shahba, A. y Rajasekaran, S., Free vibration and stability of tapered Bernoulli-Euler beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical modelling*, 36:3094–3111, 2012.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Wakashima, K., Hirano, T. y Niino, M., Space Applications of Advanced Structural Materials. *Proceedings of the ESA Symposium*, 303:97, 1990.

# **CAPÍTULO 3**

## **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG EN VOLADIZO CON MÁS DE UNA MASA ADOSADA**

### **MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ**

### **TEORÍA DE VIGAS DE BERNOULLI-EULER**

### 3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrolla un análisis enfocado a vigas AFG Bernoulli-Euler en voladizo, que soportan varias masas adosadas (Figura 3.1). Se continúa con la idea de rigidización dinámica del elemento estructural viga, es decir, buscando elevar las frecuencias más bajas mediante el doble efecto de la reducción del peso y del incremento de la rigidez global de la viga. Se evalúa la influencia de la variación de la altura en la sección transversal y el empleo de esta clase de materiales avanzados en la dirección axial de la viga (AFGM).

El método aproximado de Rayleigh-Ritz se aplica para hallar la solución al problema.

### 3.2 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA

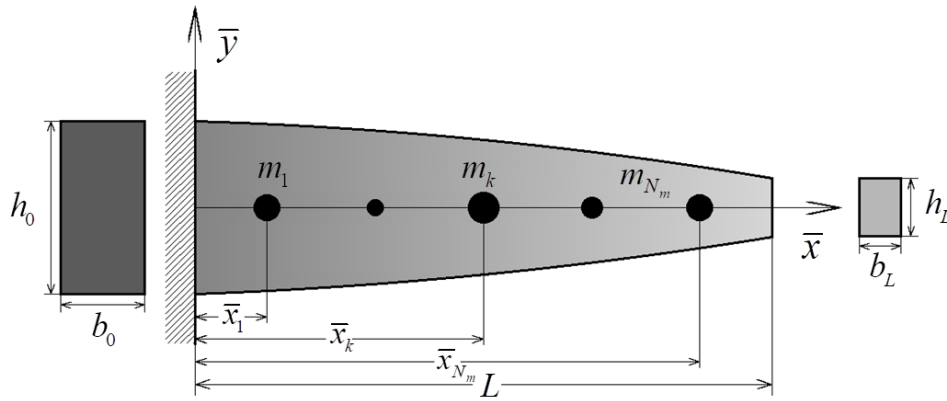


Figura 3.1: Viga cantiléver AFG Bernoulli-Euler ahusada con  $N_m$  masas adosadas en posiciones arbitrarias.

De acuerdo con lo citado en el capítulo anterior, el funcional de energía  $J$  para el problema de vibraciones en vigas, es expresado en término de la diferencia entre las energías máximas de deformación  $U_{máx}$  y cinética  $T_{máx}$ , Ec (2.6). Debido a que el presente modelo considera  $N_m$  masas puntuales adosadas, la Ec. (2.10) adopta la siguiente forma:

$$T_{máx(2)} = \frac{1}{2} \omega^2 \left( \sum_{k=1}^{N_m} m_k L^2 \left( V_a \big|_{x=x_{mk}} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N_m} m_k r_{gk}^2 \left( \frac{dV_a}{dx} \bigg|_{x=x_{mk}} \right)^2 \right). \quad (3.1)$$

Recurriendo a las consideraciones hechas para la Ec. (2.14), e implementando las Ecs. (2.13), el funcional de energía  $J$  puede escribirse como:

$$J[V_a(x)] = \frac{E_0 I_0}{2L} \times \left[ \int_0^1 f_E f_I \left( V_a'' \right)^2 dx - \Omega^2 \left[ \int_0^1 f_\rho f_A \left( V_a \right)^2 dx + \sum_{k=1}^{N_m} M_k \left( \left( V_a \big|_{x=x_{mk}} \right)^2 + c_{mk}^2 \left( V_a' \big|_{x=x_{mk}} \right)^2 \right) \right] \right] \quad (3.2)$$

con  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_0 A_0}{E_0 I_0}}$ ,  $M_k = \frac{m_k}{\rho_0 A_0 L}$ ,  $c_{mk} = \frac{r_{gk}}{L}$ ;



donde  $x_{mk}$  es la coordenada adimensional donde se ubica cada una de las masas puntuales  $m_k$ .

Luego, al derivar el funcional respecto a cada constante arbitraria  $C_j$ , resulta un sistema de ecuaciones lineales similar al de la Ec. (2.17), donde el determinante de la matriz  $\mathbf{R}$  es la ecuación de los coeficientes de frecuencia.

Los elementos  $k_{ij}$  de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  son idénticos a los expuestos en la Ec. (2.20), mientras que los elementos  $m_{ij}$  de la matriz de masa  $\mathbf{M}$  adoptan esta nueva forma:

$$m_{ij} = \int_0^1 f_p(x) f_A(x) \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{k=1}^{N_m} M_k \left( \varphi_i \Big|_{x=x_{mk}} \varphi_j \Big|_{x=x_{mk}} + c_{mk}^2 \varphi_i' \Big|_{x=x_{mk}} \varphi_j' \Big|_{x=x_{mk}} \right) \quad (3.3)$$

Finalmente, se resuelve el problema de autovalores, el cuál es equivalente al de la Ec. (2.22).

### 3.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Parte de los resultados aquí presentados, se encuentran publicados en el trabajo de [Rossit et al. \(2017\)](#).

#### 3.3.1 Comparación con la literatura

En la literatura científica, no se hallaron valores de coeficientes de frecuencia naturales para la vibración transversal libre de vigas AFG, con  $N_m$  masas adosadas. Sin embargo, si hay información de una viga en voladizo homogénea, de sección transversal variable y con múltiples masas puntuales adosadas. Este modelo fue profundamente estudiado por [Wu y Chen \(2003\)](#) y [Chen y Liu \(2006\)](#), mediante la implementación de un método analítico y numérico combinado (ANCM, sus siglas en inglés), propuesto por [Wu y Lin \(1990\)](#). [Wu y Chen \(2003\)](#), además, analizaron el problema por medio del método de elementos finitos.

Las propiedades físicas del material que componen a la viga en consideración son: módulo de Young  $E = 2.051 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  y densidad de masa  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . En cuanto a las dimensiones geométricas, posee ancho constante  $b = b_0 = b_L = 0.10 \text{ m}$ , longitud  $L = 1.60 \text{ m}$  y altura  $h$  con variación lineal desde el extremo empotrado  $h_0 = 0.40 \text{ m}$ , hasta el extremo libre  $h_L = 0.08 \text{ m}$ . Además, el modelo considera que las masas adosadas son todas iguales y tienen una magnitud equivalente a la quinta parte de la masa real de la viga. Es decir:

$$m_k = \frac{\rho AL}{5} = \frac{7850 (\text{kg/m}^3) \times \left( \frac{(0.40 \text{ m} + 0.08 \text{ m})}{2} \times 1.60 \text{ m} \right) \times 0.10 \text{ m}}{5} = 60.288 \text{ kg}; \quad (3.4)$$

por lo tanto, el coeficiente de masas a adoptar, en la formulación establecida, es:

$$M_k = \frac{m_k}{\rho_0 A_0 L} = \frac{60.288 \text{ kg}}{7850 (\text{kg/m}^3) \times 0.10 \text{ m} \times 0.40 \text{ m} \times 1.60 \text{ m}} = 0.12 \quad \text{con } k = 1 \text{ a } 5. \quad (3.5)$$

Los casos en comparación corresponden a tres situaciones particulares de la [Figura 3.1](#):

- 1) Viga sin masas adosadas
- 2) Viga con una masa puntual adosada en el extremo libre ( $x_{m1} = 1$ ).
- 3) Viga con cinco masas puntuales adosadas en posiciones equidistantes. Con coordenadas dimensionales,  $\bar{x}_{mk} = 0.2 \text{ m}, 0.5 \text{ m}, 0.8 \text{ m}, 1.1 \text{ m}$  y  $1.4 \text{ m}$ . O bien, para coordenadas adimensionales:  $x_{m1} = 0.125$ ,  $x_{m2} = 0.3125$ ,  $x_{m3} = 0.50$ ,  $x_{m4} = 0.6875$  y  $x_{m5} = 0.875$ .

Es importante aclarar, que estos autores no consideraron para este modelo la inercia rotacional de las masas, por lo cual debe adoptarse en la Ec. (3.3)  $c_{mk} = 0$  para  $k = 1$  a  $5$ .

En la [Tabla 3.1](#), se indican las primeras cinco frecuencias naturales:

$$\omega_i = \frac{\Omega_i}{L^2} \sqrt{\frac{E_0 I_0}{\rho_0 A_0}} \quad (3.6)$$

obtenidas, además, de las determinadas por [Wu y Chen \(2003\)](#) y [Chen y Liu \(2006\)](#).

Número de masas	$\omega_i [\text{rad / seg}]$					Solución
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	
0	989.6626	3629.5821	8503.9742	15704.6851	25267.5122	M.R-Ritz
	989.5017	3628.6311	8501.3310	15699.4691	25258.8597	<a href="#">Wu y Chen (2003)</a>
	989.6626	3629.5821	8503.9741	15704.6849	25267.5120	<a href="#">Chen y Liu (2006)</a>
1	569.3747	2503.7143	6710.2676	13288.9981	22240.7445	M.R-Ritz
	569.3039	2503.2976	6709.0487	13286.4974	22236.4917	<a href="#">Wu y Chen (2003)</a>
	569.6273	2508.8947	6743.2318	13408.5313	22570.1693	<a href="#">Chen y Liu (2006)</a>
5	613.1940	2524.8827	6356.5459	12116.3769	15928.0310	M.R-Ritz
	613.1226	2524.3389	6353.4962	12105.9359	15885.0965	<a href="#">Wu y Chen (2003)</a>
	613.2201	2525.5381	6366.4999	12184.0282	16089.9494	<a href="#">Chen y Liu (2006)</a>

Tabla 3.1: Frecuencias naturales para la viga cantiléver homogénea con variación lineal de la altura y  $N_m$  masas.

Se observa que las frecuencias obtenidas por medio del método de Rayleigh-Ritz, con  $N_p = 20$  términos de polinomios, poseen una precisión muy buena, en comparación a los resultados que brindaron estos autores. Por otro lado, no hay que perder de vista que el método de Rayleigh-Ritz siempre brinda cotas superiores de los valores buscados ([Ritz, 1908](#)).

Si bien el hecho de adosar una masa puntual a la viga produce una disminución de las frecuencias naturales, tal como se demostró en capítulo anterior; en la [Tabla 3.1](#) puede apreciarse que (para este caso) colocar una sola masa en el extremo libre tiene mayor efecto en la disminución de las frecuencias que si se adosan 5 masas distribuidas en la longitud  $L$  de la viga. La razón puede fundamentarse en que la energía cinética (Ec. (3.1)) que aporta una sola

masa adosada en el extremo libre es mayor en comparación a la que introducen las 5 masas. Es decir, que para masas de igual magnitud, cuanto más alejada del empotramiento se encuentre mayor será su efecto. Luego, en el balance energético inciden de diferente manera.

### 3.3.2 Casos propuestos

Las generalidades del modelo, representado en la [Figura 3.1](#), permiten considerar  $N_m$  masas puntales diferentes adosadas en posiciones arbitrarias, incorporar distintos materiales AFG, distribuciones, etc.; en consecuencia, sería factible hacer numerosos estudios.

Para reducir el espectro de posibilidades y facilitar la comparación, es que se analiza el comportamiento de vigas, con diferentes variantes, considerando las mismas características para las masas (cantidad, magnitud y posiciones) que las indicadas en [3.3.1](#). Esto permite evaluar la influencia de la variación de la altura en la sección, las propiedades del material AFG y el efecto de la inercia rotacional de las masas adosadas.

Para los cálculos, además, se adopta al coeficiente  $c_{mk} = c_m$ , es decir, idéntico para todas masas. Se emplean  $N_p = 20$  términos de polinomios en el método de Rayleigh-Ritz, para la precisión de los resultados.

Para cada caso, se considera el peso de la viga en análisis en relación con el peso de una viga de sección uniforme y de acero, que se toma como material de referencia, por medio del coeficiente de peso de viga  $W_b$ . De acuerdo con las Ecs. [\(2.13\)](#), se puede escribir:

$$W_b = \frac{g \int_0^L \rho(\bar{x}) b(\bar{x}) h(\bar{x}) d\bar{x}}{\rho_{Ac} g b_0 h_0 L} = \frac{\rho_0}{\rho_{Ac}} \int_0^1 f_\rho(x) f_b(x) f_h(x) dx. \quad (3.7)$$

Como referencia, se modela el caso de una viga homogénea de sección transversal constante ( $W_b = 1$ ), con  $h = h_0 = 0.25 L$ . Los primeros 5 coeficientes de frecuencia se exponen en la [Tabla 3.2](#).

Número de masas	$c_m$	$\Omega_i$				
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	0	3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860
	0	2.88547	19.0573	54.9751	109.981	184.480
1	0.1	2.87595	18.2857	48.9752	88.7585	142.480
	0.2	2.84756	16.1534	38.0611	74.3913	132.695
5	0	2.82078	17.7766	50.0195	98.5845	165.116
	0.1	2.79557	16.7531	43.7182	77.7529	112.439
	0.2	2.72349	14.4833	33.3422	52.1344	66.2409

Tabla 3.2: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea, de sección constante y con  $N_m$  masas adosadas.

### 3.3.2.1 Variación de la sección transversal

Se modelan dos vigas en voladizo homogéneas y de sección transversal ahusada, con ancho constante  $b = b_0$  y altura  $h$  variable. En primer lugar, se considera que la altura disminuye de manera lineal y luego de forma cuadrática. En ambos casos, las alturas son:  $h_0 = 0.25 L$  en el extremo empotrado ( $x = 0$ ) y  $h_L = 0.20 h_0$  en el extremo libre ( $x = 1$ ).

#### 3.3.2.1.a Variación lineal

En la [Tabla 3.3](#), se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia para el caso de una viga cantiléver de material homogéneo con altura variando linealmente, de acuerdo con la distribución:  $f_h(x) = 1 + ((h_L / h_0) - 1)x$ , y que soporta  $N_m$  masas adosadas. El correspondiente coeficiente de peso de viga es  $W_b = 0.60$ .

Número de masas	$c_m$	$\Omega_i$				
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	0	4.29249	15.7427	36.8846	68.1164	109.594
1	0	2.46957	10.8594	29.1047	57.6388	96.4655
	0.1	2.41889	7.94847	15.5177	34.6076	65.1943
	0.2	2.24807	4.89120	13.8757	34.0758	64.9337
5	0	2.65963	10.9513	27.5704	52.5597	69.0851
	0.1	2.59868	9.30890	19.4349	34.7070	58.2398
	0.2	2.43031	6.70613	13.2538	24.0551	42.4725

Tabla 3.3: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea, con variación lineal de la altura  $h$  y  $N_m$  masas adosadas.

Se observa que todos los valores de los coeficientes de frecuencia disminuyen, con respecto a los de la viga de sección constante ([Tabla 3.2](#)); a excepción del coeficiente de frecuencia fundamental que aumenta un 22%, cuando la viga no tiene una masa adosada. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el peso de la viga disminuye en un 40%.

#### 3.3.2.1.b Variación cuadrática

En la [Tabla 3.4](#), se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia para el caso de una viga cantiléver constituida por material homogéneo, con altura variando de manera cuadrática de acuerdo con la distribución:  $f_h(x) = 1 + ((h_L / h_0) - 1)x^2$ , y que soporta  $N_m$  masas adosadas. El correspondiente coeficiente de peso de viga es  $W_b = 0.733$ .

En este caso, en todas las situaciones aumenta el coeficiente de frecuencia fundamental; de manera significativa (35%) para la viga sin masa, y entre un 3% y un 13 % cuando hay masas.

Los demás coeficientes de frecuencia si bien son menores a los valores obtenidos para la viga uniforme, son claramente mayores a los brindados para la altura con variación lineal. El peso en este caso disminuye un 26.7 %.

Número de masas	$c_m$	$\Omega_i$				
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	0.0	4.76281	19.9475	46.8110	86.0549	137.967
1	0.0	3.13723	13.2651	35.5197	71.0597	119.501
	0.1	3.09420	9.73446	18.1845	41.2880	79.1301
	0.2	2.93478	5.81291	16.3535	40.7512	78.8805
5	0.0	3.19588	14.5899	36.7244	69.8795	94.7423
	0.1	3.14343	12.7900	27.0165	47.6306	80.3455
	0.2	2.99608	9.54393	18.5847	33.3465	53.9520

Tabla 3.4: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea, con variación cuadrática de la altura  $h$  y  $N_m$  masas adosadas.

### 3.3.2.2 Implementación del material AFG

La idea de implementar materiales AFG para rigidizar dinámicamente a la viga se ha discutido en el capítulo anterior. Siguiendo los mismos lineamientos, se adopta el material AFG propuesto por [Su et al. \(2013\)](#), cuyas propiedades se detallan en la [Tabla 2.4](#). Se analizan las composiciones a) Ac-Alum y b) Alum-Ac, con variación lineal ( $n = 1$ ) y cuadrática ( $n = 2$ ) de las propiedades del material (Ecs. (2.12)), para vigas de sección transversal uniforme, de ancho  $b = b_0$  y altura  $h = h_0 = 0.25 L$ .

#### 3.3.2.2.a Variación lineal de las propiedades del material AFG

En las [Tablas 3.5](#) y [3.6](#), se presenta el caso de una viga cantiléver AFG de sección constante, con ancho  $b = b_0$  y altura  $h = h_0$ , para las composiciones: a) Ac-Alum y b) Alum-Ac, respectivamente. La densidad de masa  $\rho$  y el módulo de Young  $E$  varían linealmente con:  $f_\rho(x) = 1 + ((\rho_L / \rho_0) - 1)x$  y  $f_E(x) = 1 + ((E_L / E_0) - 1)x$ , respectivamente. El coeficiente de peso de viga es  $W_b = 0.754$ , para ambos casos.

Se observa que todos los coeficientes expuestos en las [Tablas 3.5](#) y [3.6](#) son más altos que los correspondientes a la viga de material homogéneo y sección constante ([Tabla 3.2](#)). Además, se debe tener en cuenta que se logra una reducción de peso de casi el 25%, en ambos casos.

La comparación de los valores en las [Tablas 3.5](#) y [3.6](#), refleja que cuando la viga no tiene masas adosadas ( $M = 0$ ), los coeficientes de frecuencia en la composición: a) Ac-Alum son

ligeramente más altos que en b) Alum-Ac. Pero al estar presentes las masas concentradas, los coeficientes de frecuencia para la composición b) son claramente más altos en todas las situaciones. Esto se justifica en que la mayor rigidez de la viga cerca del empotramiento, disminuye la amplitud de los desplazamientos en los puntos de aplicación de las masas y, en consecuencia, disminuye la energía cinética que las masas agregan al balance de energía.

Número de masas	$c_m$	$\Omega_i$				
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	0.0	4.84848	30.1831	84.4216	165.366	273.306
1	0.0	3.63991	24.9097	73.1652	147.805	249.257
	0.1	3.62502	23.8401	64.8386	118.077	190.480
	0.2	3.58086	20.9502	50.2625	99.1198	177.954
5	0.0	3.49983	22.7559	64.6583	127.808	202.357
	0.1	3.46028	21.2036	55.0982	96.6583	139.859
	0.2	3.34869	17.9400	40.7096	62.3621	79.9119

Tabla 3.5: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Ac-Alum), propiedades variando en forma lineal, de sección constante y con  $N_m$  masas adosadas.

Número de masas	$c_m$	$\Omega_i$				
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	0.0	4.78428	30.0154	84.1922	165.0980	273.014
1	0.0	3.83912	25.5984	74.3419	149.2900	250.954
	0.1	3.82391	24.1053	62.5444	112.3500	186.776
	0.2	3.77850	20.2308	47.0845	97.8088	178.339
5	0.0	3.77394	23.2184	64.8744	127.762	209.928
	0.1	3.73636	21.6468	55.4189	97.2130	141.155
	0.2	3.62941	18.3138	41.0588	63.4665	82.2308

Tabla 3.6: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac), propiedades variando en forma lineal, de sección constante y con  $N_m$  masas adosadas.

### 3.3.2.2.b Variación cuadrática de las propiedades del material AFG

De acuerdo con el análisis desarrollado para la [Figura 2.5](#), cuando el parámetro de heterogeneidad del material funcionalmente graduado es mayor a uno ( $n > 1$ ), en la Ec. (2.12), la composición b) Alum-Ac permite obtener una mejor de rigidización dinámica en comparación a la composición a) Ac-Alum. Es por eso que para el presente estudio se implementa la composición b) para la variación de las propiedades del material AFG.

En la [Tabla 3.7](#), se presenta el caso de una viga cantiléver de sección constante, con ancho  $b = b_0$  y altura  $h = h_0$ , constituida por material AFG (Alum-Ac), donde la densidad de masa y el módulo de Young se consideran variando de forma cuadrática, con las siguientes expresiones:  $f_\rho(x) = 1 + ((\rho_L / \rho_0) - 1)x^2$ ,  $f_E(x) = 1 + ((E_L / E_0) - 1)x^2$ . Para este caso, el coeficiente de

peso de viga es  $W_b = 0.672$ .

Número de masas	$c_m$	$\Omega_i$				
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	0.0	5.14207	33.6746	94.2766	184.4750	304.664
1	0.0	4.07781	28.6402	83.0790	166.5560	279.720
	0.1	4.06127	26.7556	68.2451	122.4830	206.091
	0.2	4.01188	21.9910	51.0982	108.1640	198.114
5	0.0	3.99688	25.2960	70.5746	138.8270	225.321
	0.1	3.95596	23.4987	59.7764	104.2720	151.196
	0.2	3.83970	19.7444	43.8372	67.4369	87.1758

Tabla 3.7: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac), propiedades variando en forma cuadrática, de sección constante y con  $N_m$  masas adosadas.

Los coeficientes de frecuencia son mayores, en todos los casos, en referencia a los obtenidos para la variación lineal del material (Tabla 3.6). Además, el coeficiente de peso de viga  $W_b$  disminuye aún más que los casos anteriores, es decir, se reduce alrededor de un 11% respecto de la viga con variación lineal del material y un 33% en relación al de la viga de sección constante y homogénea.

La Tabla 3.8, expresa de manera porcentual, la rigidización que se logra de emplear la variación cuadrática de las propiedades del material sobre la variación lineal. Particularmente, se observa una leve pero mayor rigidización cuando no hay masas adosadas.

$$\Omega_{i(\%)} = \frac{\Omega_{i(\text{AFG } (n=2))} - \Omega_{i(\text{AFG } (n=1))}}{\Omega_{i(\text{AFG } (n=1))}} \times 100. \quad (3.8)$$

Número de masas	$c_m$	$\Omega_{i(\%)}$				
		$\Omega_{1(\%)}$	$\Omega_{2(\%)}$	$\Omega_{3(\%)}$	$\Omega_{4(\%)}$	$\Omega_{5(\%)}$
0	0.0	7.48	12.19	11.98	11.74	11.59
1	0.0	6.22	11.88	11.75	11.57	11.46
	0.1	6.21	10.99	9.11	9.02	10.34
	0.2	6.18	8.70	8.52	10.59	11.09
5	0.0	5.91	8.95	8.79	8.66	7.33
	0.1	5.88	8.56	7.86	7.26	7.11
	0.2	5.79	7.81	6.77	6.26	6.01

Tabla 3.8: Porcentaje de rigidización de  $n = 2$  vs.  $n = 1$ .

### 3.3.2.3 Variación de la sección e implementación del material AFG

Finalmente, se analiza el efecto que causa variar: la altura de la sección transversal y la composición del material. Con tal fin, las dos situaciones que proporcionaron los valores de coeficientes frecuencia más altos se asocian. Es decir, la variación cuadrática de la altura en la

sección transversal y la variación cuadrática de la composición b) Alum-Ac.

En la [Tabla 3.9](#), se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos para la viga cantiléver AFG ahusada. Para este caso, el coeficiente de peso de viga es  $W_b = 0.458$ .

Número de masas	$c_m$	$\Omega_i$				
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	0.0	7.06696	29.0915	67.8701	124.7990	200.248
1	0.0	4.25362	18.7742	51.5588	103.4070	173.961
	0.1	4.16144	11.3068	24.2970	59.5306	115.162
	0.2	3.78629	6.63614	22.9762	59.1208	114.964
5	0.0	4.45705	19.9691	50.3603	89.1158	124.575
	0.1	4.37081	16.8378	34.8377	63.9309	105.876
	0.2	4.12972	11.9184	23.9565	44.7013	74.0203

Tabla 3.9: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac), con propiedades y altura variando cuadráticamente ( $n = 2$ ).

Nuevamente, la variación de la sección transversal afecta aumentando los coeficientes de frecuencia fundamentales en todos los casos y disminuyendo los coeficientes de frecuencia superiores, en relación a la viga AFG (Alum-Ac) de sección constante. Por otro lado, la reducción de peso es considerable, en comparación a las vigas de sección constante. Respecto a la viga uniforme de acero disminuye un 54% y en relación a la viga uniforme de material AFG con propiedades variando linealmente (con  $n = 1$  en la Ec. (2.12)), un 32%.

### 3.4 REFERENCIAS

- Chen, D.W. y Liu, T.L., Free and forced vibrations of a tapered cantilever beam carrying multiple point masses, *Structural Engineering and Mechanics*, 23(2):209–216, 2006.
- Ritz, W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik. *Journal für Reine und Angewandte Mathematik*, 135:1–61, 1908.
- Rossit, C.A., Bambill, D.V. y Gilardi, G.J., Free vibrations of AFG cantilever tapered beams with attached masses. *Structural Engineering and Mechanics*, 61(5):685–691, 2017.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Wu, J.S. y Chen, D.W., Bending vibrations of wedge beams with any number of point masses. *Journal of Sound and Vibrations*, 261:1073–1090, 2003.
- Wu, J.S. y Lin, T.L., Free vibration analysis of a uniform cantilever beam with point masses by an analytical and numerical combined method, *Journal of Sound and vibration*, 136:201–203, 1990.



# **CAPÍTULO 4**

## **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG CANTILÉVER CON UNA MASA ADOSADA**

### **MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADA (GDQM)**

### **TEORÍA DE VIGAS DE BERNOULLI-EULER**

## 4.1 MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADA (GDQM)

### 4.1.1 Introducción

El método de cuadratura diferencial (Differential Quadature Method -DQM-) fue propuesto por los investigadores [Bellman y Casti \(1971\)](#), en una contribución memorable. Sin embargo, el método permanecería con un uso relativamente moderado durante las siguientes dos décadas y luego, su uso se difundiría significativamente.

El mérito de su divulgación y extensión, corresponde al profesor C.W. Bert, ([Bert y Malik, 1996](#)), y a su importante grupo de colaboradores. Este grupo, empleó DQM en una gran variedad de aplicaciones, principalmente en la resolución de problemas estáticos y dinámicos relacionados con el comportamiento a flexión de vigas y placas, a torsión, en situaciones de estabilidad dinámica, etc. ([Bert et al., 1994](#)).

Los trabajos de Bert, fueron utilizados por otros autores extensivamente, dando lugar a valiosas contribuciones que perfeccionaron el método. Los primeros indicios de un método mejorado y generalizado (GDQM, sus siglas en inglés) aparecen en los trabajos de [Shu y Richards \(1992\)](#) y de [Du et al. \(1994\)](#). La precisión y la eficiencia en los cálculos mejorarían aún más, gracias a una serie de modificaciones apropiadas en los algoritmos ([Gutiérrez et al., 1994](#); [Shu y Chen, 1999](#); [Liu y Wu, 2001](#)).

[Zong \(2003\)](#) desarrolló estudios de estabilidad numérica del método, particularmente en su aplicación a problemas dinámicos (donde existe la mayor inestabilidad numérica). Posteriormente, en 2005, DQM sería reconocido como un método preciso ([Vera et al., 2005](#)).

Actualmente, se dispone de una extensa bibliografía que describe detalladamente el método, su evolución y sus diversas variantes; por ejemplo, en los libros de: [C. Shu \(2000\)](#), [Chang \(2006\)](#), [Zong y Zhang \(2009\)](#) y [Wang \(2015\)](#), por citar algunos.

El GDQM y sus variantes se encuentran en un proceso de fuerte revitalización. Las innovaciones en nuevos *softwares* han sido de gran ayuda en todo este proceso, al permitir la resolución de grandes sistemas de bases de datos. Sus atractivas características de rápida convergencia, alta precisión y eficiencia computacional, lo han catapultado al mundo científico actual como una poderosa herramienta de cálculo.

### 4.1.2 Esencia del método

El método de cuadratura diferencial generalizada (GDQM) es una técnica numérica que permite resolver ecuaciones diferenciales, transformándolas en ecuaciones lineales análogas. El método aproxima la derivada de una función en un punto cualquiera, como una suma lineal

ponderada de todos los valores funcionales calculados en puntos discretos de un mallado convenientemente adoptado (Bert y Malik, 1996). Su aplicación requiere seguir los siguientes pasos:

1. Discretizar el dominio, generando una malla de puntos de prueba o nodos.
2. Obtener los coeficientes de peso asociados a la malla de puntos generada.
3. Plantear las ecuaciones análogas de cuadratura: del sistema diferencial gobernante, de las condiciones de borde y de las condiciones de continuidad del sistema (Por ejemplo, cuando existe más de un tramo).
4. Resolver del sistema lineal de ecuaciones resultante.

#### 4.1.2.1 Mallado

La discretización del dominio conforma la base del método, y consiste en generar una distribución, convenientemente elegida, de puntos de prueba o nodos sobre el eje del elemento estructural elegido (en este caso sobre la directriz de la viga).

La distribución de nodos puede lograrse mediante un mallado regular o irregular. En la resolución de problemas de vibraciones en vigas, la elección del mallado regular ha tenido problemas, debido fundamentalmente a que el método impide plantear en un mismo punto de prueba las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde.

Si bien el mallado regular mejora, cuando se coloca a los dos primeros puntos adyacentes de cada extremo bien próximos entre sí (a una distancia  $\delta$ ); realizar una mallado irregular resulta ser la manera más apropiada de resolver el problema (Bert y Malik, 1996). El mallado irregular del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato resulta ser el más adecuado (Shu y Chen, 1999), pues logra una mayor estabilidad numérica al incrementar el número de puntos y brinda mejores condiciones de convergencia. Este mallado se genera mediante la expresión:

$$x_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{(N-1)} \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

donde  $x_i$  es la coordenada espacial del nodo  $i$  y  $N$  el número de nodos de la grilla. En la Figura 4.1 se aprecia la correspondiente distribución.

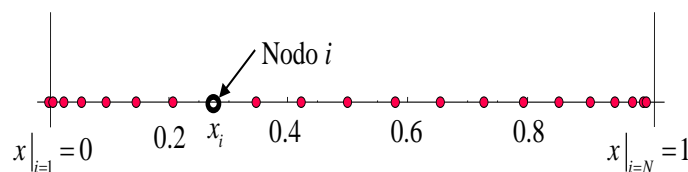


Figura 4.1: Mallado irregular tipo Chebyshev–Gauss–Lobato.

#### 4.1.2.2 Reglas de cuadratura y coeficientes de peso

Las reglas de cuadratura diferencial permiten expresar de manera sencilla, las derivadas de las variables independientes, mediante una combinación lineal de “coeficientes de peso de ponderación”. Para el caso de la teoría de vigas de Bernoulli-Euler, la variable independiente es el desplazamiento  $V$ ; y de acuerdo con las reglas del método (Bert y Malik, 1996): la derivada de orden  $(q)$  del desplazamiento  $V$  en el nodo  $i$ , se expresa como:

$$\left. \frac{d^q V}{dx^q} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij}^{(q)} V_j, \quad (4.2)$$

donde  $V_j$  es el desplazamiento del nodo  $j$  y  $B_{ij}^{(q)}$  son los coeficientes de ponderación, para el orden de derivada  $(q)$ . Estos coeficientes se determinan empleando funciones de interpolación de Lagrange y una serie de expresiones explícitas, algunas de ellas recursivas, (Karami et al., 2003):

$$\prod(x_i) = \prod_{j=1 \text{ con } j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.3)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_j) \prod(x_j)}, \quad q = 1; \quad B_{ij}^{(1)} = q \left[ B_{ii}^{(q-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(q-1)}}{x_i - x_j} \right], \quad q > 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad \text{para } i \neq j \quad (4.4)$$

$$B_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1 \text{ con } j \neq i}^N B_{ij}^{(1)}, \quad q = 1; \quad B_{ii}^{(q)} = - \sum_{j=1 \text{ con } j \neq i}^N B_{ij}^{(q)}, \quad q > 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad \text{para } i = j \quad (4.5)$$

Al reemplazar los polinomios de la Ec. (4.3) en las expresiones de la Ec. (4.4), se obtienen los coeficientes de peso que estarán fuera de la diagonal ( $i \neq j$ ) en la matriz de coeficientes resultante. De acuerdo al DQM (Bert y Malik, 1996), la suma total de los coeficientes de peso, en cualquier fila dicha matriz, debe ser igual a cero. Por lo cual, los términos de la diagonal ( $i = j$ ) se pueden obtener empleando las expresiones recursivas de la Ec. (4.5).

Para armar la matriz de coeficientes de peso se deben seguir una secuencia de pasos, la cual se encuentra completamente detallada en la implementación analítica sobre el modelo propuesto.

#### 4.1.2.3 Sistema lineal análogo de cuadratura

Aplicando las reglas de cuadratura a las ecuaciones diferenciales, condiciones de borde y de continuidad del problema, se obtienen las respectivas ecuaciones análogas de cuadratura.

#### 4.1.2.4 Resolver el sistema lineal de ecuaciones resultantes

Seguidamente se deben ensamblar las ecuaciones señaladas precedentemente en un único sistema lineal. Para cumplir con este propósito resulta conveniente, expresar el sistema ensamblado como sigue, (Bert y Malik, 1996):

$$\begin{bmatrix} [B_{bb}] & [B_{bd}] \\ [B_{db}] & [B_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{V_b\} \\ \{V_d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \Omega^2 \{V_d\} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

donde el subíndice "b" indica los puntos de grilla utilizados para formular las condiciones de borde y de continuidad análogas de cuadratura, y el subíndice "d" indica los puntos de grilla utilizados para formular la ecuación diferencial gobernante análoga de cuadratura.

Para resolver el problema de autovalores, es necesario eliminar el vector  $\{V_b\}$ . Entonces, de la Ec. (4.6), se obtiene:

$$[B_{bb}]\{V_b\} + [B_{bd}]\{V_d\} = \{0\} \quad (4.7)$$

$$[B_{db}]\{V_b\} + [B_{dd}]\{V_d\} - \Omega^2 \{V_d\} = \{0\} \quad (4.8)$$

Luego, de la Ec. (4.7) se despeja el vector  $\{V_b\}$

$$\{V_b\} = [B_{bb}]^{-1} [-B_{bd}]\{V_d\} \quad (4.9)$$

y se reemplaza en la Ec. (4.8)

$$[B_{db}][B_{bb}]^{-1} [-B_{bd}]\{V_d\} + [B_{dd}]\{V_d\} - \Omega^2 \{V_d\} = \{0\} \quad (4.10)$$

De esta manera, se obtiene la ecuación clásica de autovalores

$$\mathbf{B} \{V_d\} - \Omega^2 \mathbf{I} \{V_d\} = \{0\} \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz unidad o identidad y la matriz  $\mathbf{B}$  se obtiene a partir de las submatrices  $[B_{bb}]$ ,  $[B_{bd}]$ ,  $[B_{db}]$  y  $[B_{dd}]$ , en la forma:

$$\mathbf{B} = [B_{dd}] - [B_{db}] \cdot [B_{bb}]^{-1} \cdot [B_{bd}] \quad (4.12)$$

Como es sabido, la condición de no trivialidad de la ecuación clásica requiere que:

$$|\mathbf{B} - \Omega^2 \mathbf{I}| = 0 \quad (4.13)$$

calculando el determinante, se obtienen los coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$  buscados.

## 4.2 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA

El modelo de análisis que se emplea en el presente capítulo coincide con el implementado en el Capítulo 2 (Figura 2.1). Luego, la ecuación diferencial que gobierna las vibraciones transversales libres para una viga AFG Bernoulli-Euler y de sección transversal variable, de acuerdo con la Ec. (1.5), tiene la forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left[ E(\bar{x}) I(\bar{x}) \frac{\partial^2 v(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2} \right] + \rho(\bar{x}) A(\bar{x}) \frac{\partial^2 v(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.14)$$

donde  $(E(\bar{x}) I(\bar{x}))$  representa la rigidez a flexión de la viga y  $(\rho(\bar{x}) A(\bar{x}))$  la masa por unidad de longitud.

Análogamente al procedimiento detallado para el método de Rayleigh-Ritz, para determinar los coeficientes de las frecuencias naturales, se asume: a la deflexión de la viga  $v(\bar{x}, t)$  expresada para sus modos normales de vibración, Ec. (2.2); y la adimensionalización global de la coordenada espacial  $\bar{x}$  y de la amplitud de desplazamiento  $\bar{V}(\bar{x})$ , respecto de la longitud  $L$  de la viga Ec. (2.3).

Reemplazando las Ecs. (2.2) y (2.3) en la Ec. (4.14), se obtiene:

$$\frac{d^2}{L^3 dx^2} \left[ E(x) I(x) \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right] - \rho(x) A(x) L \omega^2 V(x) = 0. \quad (4.15)$$

con  $E(\bar{x}) = E(x)$ ;  $I(\bar{x}) = I(x)$ ;  $\rho(\bar{x}) = \rho(x)$  y  $A(\bar{x}) = A(x)$ . Luego, considerando las Ecs. (2.13), la Ec. (4.15) puede reescribirse como:

$$\frac{1}{f_\rho(x) f_A(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left[ f_E(x) f_I(x) \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 \frac{\rho_0 A_0}{E_0 I_0} L^4 V(x) = 0. \quad (4.16)$$

Trabajando algebraicamente con la Ec. (4.16) y recordando que los coeficientes de frecuencia tienen la forma  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{(\rho_0 A_0)/(E_0 I_0)}$ , se llega a:

$$v_1(x) \frac{d^2 V(x)}{dx^2} + v_2(x) \frac{d^3 V(x)}{dx^3} + v_3(x) \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \Omega^2 V(x), \quad (4.17)$$

donde  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  y  $v_3(x)$ , son los denominados coeficientes de forma; los cuales, en este caso, permiten considerar las variaciones de las propiedades del material AFG y de la geometría en la ecuación diferencial gobernante. Adoptan, las siguientes formas:

$$v_1(x) = \frac{f_E'' f_I + 2f_E' f_I' + f_E f_I''}{f_\rho f_A}; v_2(x) = \frac{2(f_E' f_I + f_E f_I')}{f_\rho f_A}; v_3(x) = \frac{f_E f_I}{f_\rho f_A} \text{ con } f_j' = \frac{df_j}{dx}. \quad (4.18)$$

Aplicando las reglas de cuadratura, se obtiene la ecuación diferencial análoga.

❖ Ecuación diferencial análoga:

$$\nu_1(x_i) \sum_{j=1}^N B_{ij}^2 V_j + \nu_2(x_i) \sum_{j=1}^N B_{ij}^3 V_j + \nu_3(x_i) \sum_{j=1}^N B_{ij}^4 V_j = \Omega^2 V_i \quad \text{con } i = 3, 4, \dots, N-2. \quad (4.19)$$

En esta ecuación, los coeficientes de forma se indican como  $\nu_k(x_i)$  con  $k = 1, 2$  y  $3$ . El subíndice  $i$ , hace referencia al nodo de la grilla que se está considerando. Por lo cual, las relaciones dadas en la Ec. (4.18) se calculan para cada nodo  $i$ . Además, puede verse en la Ec. (4.19) que los puntos  $1, 2, N-1$  y  $N$  sobre el dominio, no son utilizados para escribir la ecuación diferencial análoga, ya que se reservan para las condiciones de borde y de continuidad análogas, en la teoría de vigas de Bernoulli-Euler.

Luego, aplicando las reglas de cuadratura (Ec. (4.2)), se obtienen las ecuaciones de borde análogas de cuadratura diferencial para la viga cantiléver con y sin masa adosada. (Anexo 1).

❖ Condiciones de borde análogas:

$$\begin{aligned} x=0 & \begin{cases} V_i|_{i=1} = 0 \\ \sum_{j=1}^N B_{ij}^1 V_j \Big|_{i=1} = 0 \end{cases} \\ x=1 & \begin{cases} \left( \nu_5(x_i) \sum_{j=1}^N B_{ij}^2 V_j \right) \Big|_{i=N} = 0 \\ \left( \nu_4(x_i) \sum_{j=1}^N B_{ij}^2 V_j \right) \Big|_{i=N} + \left( \nu_5(x_i) \sum_{j=1}^N B_{ij}^3 V_j \right) \Big|_{i=N} = 0 \quad (\text{sin masa}) \\ \left[ -\frac{1}{M} \left( \nu_4(x_i) \sum_{j=1}^N B_{ij}^2 V_j \right) \Big|_{i=N} + \left( \nu_5(x_i) \sum_{j=1}^N B_{ij}^3 V_j \right) \Big|_{i=N} \right] = \Omega^2 V_i|_{i=N} \quad (\text{con masa}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

con  $M = \frac{m}{\rho_0 A_0 L}$ ;  $\nu_4(x_i) = f_E' f_I + f_E f_I'$ ;  $\nu_5(x_i) = f_E f_I$

donde  $\nu_4(x_i)$  y  $\nu_5(x_i)$  son los coeficientes de forma, para las condiciones de borde y  $M$  es el coeficiente de masas que relaciona la masa puntual  $m$  con la masa de una viga de material homogéneo y de sección transversal constante (ambos parámetros asociados a la sección transversal inicial).

### 4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

A continuación, se presentan los casos de comparación y propuestos para el modelo en cuestión (Figura 2.1). Algunos de los resultados aquí expuestos, se pueden encontrar en los

trabajos publicados por [Gilardi et al. \(2016b, a\)](#).

### 4.3.1 Casos de comparación

De la misma manera que en el Capítulo 2, se procede a realizar un estudio de convergencia del método (GDQM) y posteriormente, a modelar casos que se encuentran en la bibliografía.

#### 4.3.1.1 Viga cantiléver sin masa

En primer lugar, se aplica GDQM para analizar la vibración transversal libre de una viga Bernoulli-Euler en voladizo de sección transversal constante y de material homogéneo. Si bien este caso fue estudiado por muchos autores; los valores de los coeficientes de frecuencia (exactos) que se utilizan para la comparación se obtienen del libro de [Karnovsky y Lebed \(2001\)](#), en el cual existe un valioso resumen de resultados del análisis estructural.

De acuerdo con el modelo (especificado en **2.4.1**), la ecuación diferencial análoga es:

$$\sum_{j=1}^N B_{ij}^4 V_j = \Omega^2 V_i \quad \text{con } i = 3, 4, \dots, N-2 \quad (4.21)$$

con las condiciones de borde:

$$V_i|_{i=1} = 0, \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^1 V_j|_{i=1} = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^2 V_j|_{i=N} = 0, \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^3 V_j|_{i=N} = 0. \quad (4.22)$$

Para hallar los primeros 5 coeficientes de frecuencia, la cantidad mínima de nodos requerida es  $N = 9$ ; dado que para esta teoría de vigas, cada nodo tiene un solo grado de libertad (G.L.): el desplazamiento  $V$ . Por ende, el número de coeficientes de frecuencia a determinar dependerá directamente del número de nodos que representen a la ecuación diferencial.

De acuerdo a lo citado precedentemente, de los nueve nodos cuatro son nodos de borde: 1, 2, 8, 9; y los restantes cinco (nodos interiores) son los que representan a la ecuación diferencial. La [Figura 4.2](#) permite visualizar la disposición de los nodos elegida, la cual corresponde a una distribución o mallado irregular del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato.

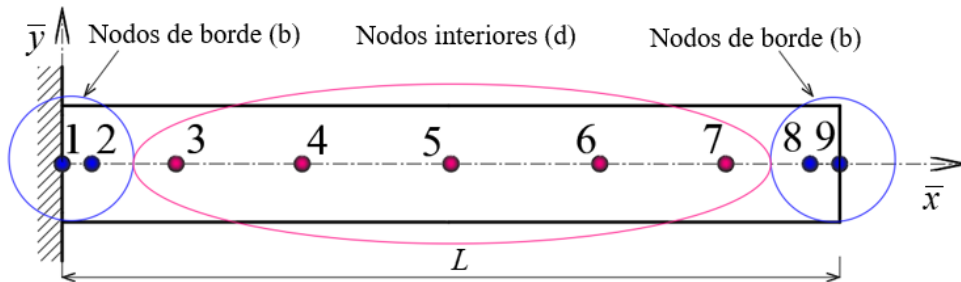


Figura 4.2: Viga Bernoulli-Euler cantiléver con mallado irregular del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato.



Cada nodo en su posición tiene incidencia sobre sí mismo y sobre los demás nodos. Para contemplarlas, se genera una matriz de coeficientes auxiliares ( $B_{ij}$ ) y se le asigna su naturaleza, es decir, si el nodo representa a la ecuación diferencial (ED) o una condición de borde (CB).

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$	$V_9$
	CB	CB	ED	ED	ED	ED	ED	CB	CB
CB	$B_{11}$	$B_{12}$	$B_{13}$	$B_{14}$	$B_{15}$	$B_{16}$	$B_{17}$	$B_{18}$	$B_{19}$
CB	$B_{21}$	$B_{22}$	$B_{23}$	$B_{24}$	$B_{25}$	$B_{26}$	$B_{27}$	$B_{28}$	$B_{29}$
ED	$B_{31}$	$B_{32}$	$B_{33}$	$B_{34}$	$B_{35}$	$B_{36}$	$B_{37}$	$B_{38}$	$B_{39}$
ED	$B_{41}$	$B_{42}$	$B_{43}$	$B_{44}$	$B_{45}$	$B_{46}$	$B_{47}$	$B_{48}$	$B_{49}$
ED	$B_{51}$	$B_{52}$	$B_{53}$	$B_{54}$	$B_{55}$	$B_{56}$	$B_{57}$	$B_{58}$	$B_{59}$
ED	$B_{61}$	$B_{62}$	$B_{63}$	$B_{64}$	$B_{65}$	$B_{66}$	$B_{67}$	$B_{68}$	$B_{69}$
ED	$B_{71}$	$B_{72}$	$B_{73}$	$B_{74}$	$B_{75}$	$B_{76}$	$B_{77}$	$B_{78}$	$B_{79}$
CB	$B_{81}$	$B_{82}$	$B_{83}$	$B_{84}$	$B_{85}$	$B_{86}$	$B_{87}$	$B_{88}$	$B_{89}$
CB	$B_{91}$	$B_{92}$	$B_{93}$	$B_{94}$	$B_{95}$	$B_{96}$	$B_{97}$	$B_{98}$	$B_{99}$

(4.23)

Las correspondientes submatrices se constituyen, en función de la incidencia de cada nodo. Por ejemplo:  $B_{11}$  es CB-CB  $\rightarrow$  pertenece a  $B_{bb}$ ,  $B_{13}$  es CB-ED  $\rightarrow$  pertenece a  $B_{bd}$ ,  $B_{31}$  es ED-CB  $\rightarrow$  pertenece a  $B_{db}$  y  $B_{33}$  es ED-ED  $\rightarrow$  pertenece a  $B_{dd}$ . Así, sucesivamente para los demás nodos, hasta obtener:

$B_{bb}$	$B_{11}$ $B_{12}$ $B_{18}$ $B_{19}$ $B_{21}$ $B_{22}$ $B_{28}$ $B_{29}$ $B_{81}$ $B_{82}$ $B_{88}$ $B_{89}$ $B_{91}$ $B_{92}$ $B_{98}$ $B_{99}$	$B_{bd}$	$B_{13}$ $B_{14}$ $B_{15}$ $B_{16}$ $B_{17}$ $B_{23}$ $B_{24}$ $B_{25}$ $B_{26}$ $B_{27}$ $B_{83}$ $B_{84}$ $B_{85}$ $B_{86}$ $B_{87}$ $B_{93}$ $B_{94}$ $B_{95}$ $B_{96}$ $B_{97}$	$V_1$ $V_2$ $V_8$ $V_9$
(4.24)				
$B_{db}$	$B_{31}$ $B_{32}$ $B_{38}$ $B_{39}$ $B_{41}$ $B_{42}$ $B_{48}$ $B_{49}$ $B_{51}$ $B_{52}$ $B_{58}$ $B_{59}$ $B_{61}$ $B_{62}$ $B_{68}$ $B_{69}$ $B_{71}$ $B_{72}$ $B_{78}$ $B_{79}$	$B_{dd}$	$B_{33}$ $B_{34}$ $B_{35}$ $B_{36}$ $B_{37}$ $B_{43}$ $B_{44}$ $B_{45}$ $B_{46}$ $B_{47}$ $B_{53}$ $B_{54}$ $B_{55}$ $B_{56}$ $B_{57}$ $B_{63}$ $B_{64}$ $B_{65}$ $B_{66}$ $B_{67}$ $B_{73}$ $B_{74}$ $B_{75}$ $B_{76}$ $B_{77}$	$V_3$ $V_4$ $V_5$ $V_6$ $V_7$

Luego, hay que identificar y asignar los coeficientes de peso correspondientes a los coeficientes auxiliares empleados.

En la Ec. (4.25), se encuentra el sistema de ecuaciones lineales análogo, expresado de forma matricial y ensamblado según Bert y Malik (1996). Para hallar los respectivos coeficientes de frecuencia naturales, se resuelve el problema de autovalores de acuerdo a lo explicado.

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} & B_{18}^{(1)} & B_{19}^{(1)} & B_{13}^{(1)} & B_{14}^{(1)} & B_{15}^{(1)} & B_{16}^{(1)} & B_{17}^{(1)} \\
B_{91}^{(2)} & B_{92}^{(2)} & B_{98}^{(2)} & B_{99}^{(2)} & B_{93}^{(2)} & B_{94}^{(2)} & B_{95}^{(2)} & B_{96}^{(2)} & B_{97}^{(2)} \\
B_{91}^{(3)} & B_{92}^{(3)} & B_{98}^{(3)} & B_{99}^{(3)} & B_{93}^{(3)} & B_{94}^{(3)} & B_{95}^{(3)} & B_{96}^{(3)} & B_{97}^{(3)} \\
B_{31}^{(4)} & B_{32}^{(4)} & B_{38}^{(4)} & B_{39}^{(4)} & B_{33}^{(4)} & B_{34}^{(4)} & B_{35}^{(4)} & B_{36}^{(4)} & B_{37}^{(4)} \\
B_{41}^{(4)} & B_{42}^{(4)} & B_{48}^{(4)} & B_{49}^{(4)} & B_{43}^{(4)} & B_{44}^{(4)} & B_{45}^{(4)} & B_{46}^{(4)} & B_{47}^{(4)} \\
B_{51}^{(4)} & B_{52}^{(4)} & B_{58}^{(4)} & B_{59}^{(4)} & B_{53}^{(4)} & B_{54}^{(4)} & B_{55}^{(4)} & B_{56}^{(4)} & B_{57}^{(4)} \\
B_{61}^{(4)} & B_{62}^{(4)} & B_{68}^{(4)} & B_{69}^{(4)} & B_{63}^{(4)} & B_{64}^{(4)} & B_{65}^{(4)} & B_{66}^{(4)} & B_{67}^{(4)} \\
B_{71}^{(4)} & B_{72}^{(4)} & B_{78}^{(4)} & B_{79}^{(4)} & B_{73}^{(4)} & B_{74}^{(4)} & B_{75}^{(4)} & B_{76}^{(4)} & B_{77}^{(4)}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
V_1 \\ V_2 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7
\end{Bmatrix}
= \Omega^2
\begin{Bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7
\end{Bmatrix}
\quad (4.25)$$

Por otra parte, es bueno resaltar algunas particularidades de la matriz de coeficientes resultante (Ec. (4.25)):

1. Las condiciones de borde que representan los nodos 2 y  $N-1=8$  pasan a considerarse en los nodos 1 y  $N=9$ , respectivamente. Las particularidades del método, hacen de que sea posible asignar tantas condiciones de borde como grados de libertad posea cada nodo. Como en esta teoría, solo hay disponible un G.L. por nodo, se deben elegir 4 nodos para representarlas. Por otro lado, la realidad es que estas condiciones deben estar aplicadas sobre los extremos y no dentro de la longitud  $L$  de la viga, por lo que es viable considerarlas matemáticamente (por medio de los coeficientes de peso) como si estuvieran en un mismo punto frontera (nodos 1 y  $N=9$ ).

Al considerar una distribución irregular del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato, esto parece bastante aceptable, debido a que cuando el mallado se densifica, la distancia entre los nodos extremos (1 y 2, 8 y 9) se vuelve prácticamente despreciable.

2. Las ecuaciones se disponen de forma ascendente, con respecto al orden de la derivada ( $q$ ) de los coeficientes de peso. Es decir,  $B_{ij}^{(1)}, B_{ij}^{(2)}, B_{ij}^{(3)}$  y  $B_{ij}^{(4)}$ . En caso de que se deba representar el desplazamiento de un nodo, se puede implementar un coeficiente auxiliar  $B_{ij}^{(0)}$  que es igual a 1 si  $i = j$  (en la diagonal (Ec. (4.25))) o igual 0 si  $i \neq j$  (fuera de la diagonal (Ec. (4.25))); ya que por definición no es un coeficiente de peso propiamente dicho.
3. Los valores de los coeficientes ubicados en la diagonal principal deben ser no nulos.
4. Las submatrices  $[B_{bb}]$  y  $[B_{dd}]$  siempre son cuadradas. Para la submatriz  $[B_{bb}]$  esto es una condición indispensable, ya que se requiere calcular su inversa para obtener la matriz  $\mathbf{B}$  resultante (Ec. (4.12)).
5. Al estar todas las condiciones de borde igualadas a cero, el sistema queda de dimensiones  $N-4 \times N-4$ . Esto se manifiesta también, para todas las condiciones de borde clásicas:

empotramiento, apoyo simple, extremo libre y guiado; pues todas son independientes de los autovalores.

Seguidamente, se realiza el correspondiente análisis de convergencia. Para ello, se adopta una viga en voladizo, de sección transversal constante y constituida por material homogéneo. En la [Tabla 4.1](#), se encuentran los resultados contrastados con la solución exacta del problema ([Karnovsky y Lebed, 2001](#)). El análisis comienza con el valor mínimo de nodos ( $N=9$ ) requerido para obtener los primeros 5 coeficientes de frecuencia.

Se aprecia que a partir de  $N=15$  los primeros 2 coeficientes de frecuencia convergen, y para  $N=23$  nodos se obtiene una excelente solución para los primeros 5 coeficientes de frecuencia. Evidentemente, en la medida que el modelo se complejice, es posible que se requiera un mayor número de nodos para describir su comportamiento.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$N$
3.51655	22.1947	56.6954	107.314	192.624	9
3.51602	22.0345	61.6999	120.979	197.458	15
3.51602	22.0345	61.6971	120.898	200.136	17
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.839	19
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.861	21
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860	23
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860	25
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860	<a href="#">Karnovsky y Lebed, 2001</a>

Tabla 4.1: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea, de sección constante y  $M = 0$ .

#### 4.3.1.2 Viga cantiléver con masa

El segundo caso en consideración, es una viga vibrante en voladizo de material homogéneo y sección transversal uniforme; y que, además, posee adosada una masa puntal en su extremo libre. [Rossit y Laura \(2001\)](#) obtuvieron los valores propios ( $\beta_i = \sqrt[4]{(\rho_0 A_0)/(E_0 I_0)} \omega^{1/2} L$ ) del sistema, resolviendo de manera exacta la ecuación diferencial gobernante. Luego, este mismo problema fue tratado por [Baneerje \(2012\)](#), como un caso particular, para validar su método de rigidez dinámica (DSM, por sus siglas en inglés).

Los primeros 5 coeficientes de frecuencia de este ejemplo, para distintos valores de masas adosadas ( $M = \text{variable}$  y  $c_m = 0$ ), se encuentran en la [Tabla 4.2](#). Para obtener los coeficientes de frecuencia  $\Omega_i$  exactos basta con elevar al cuadrado los valores de  $\beta_i$ , obtenidos por [Rossit y Laura \(2001\)](#). A la comparación, se anexan los valores hallados por el método de Rayleigh-Ritz, utilizando  $N_p = 20$  términos de polinomios.

$M$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
0.5	2.0163	16.901	51.701	106.06	180.12	GDQM
	2.0163	16.901	51.701	106.06	180.12	M.R-Ritz
	2.0163	16.901	51.701	106.05	180.13	<a href="#">Baneerje (2012)</a>
1	1.5573	16.250	50.896	105.20	179.23	GDQM
	1.5573	16.250	50.896	105.20	179.23	M.R-Ritz
	1.5570	16.229	50.895	105.20	179.23	<a href="#">Baneerje (2012)</a>
	1.5573	16.250	50.895	105.21	179.24	<a href="#">Rossit y Laura (2001)</a>
5	0.75694	15.602	50.162	104.45	178.47	GDQM
	0.75694	15.602	50.162	104.45	178.47	M.R-Ritz
	0.75693	15.603	50.162	104.45	178.46	<a href="#">Rossit y Laura (2001)</a>
10	0.54138	15.512	50.064	104.35	178.37	GDQM
	0.54138	15.512	50.064	104.35	178.37	M.R-Ritz
	0.54160	15.511	50.065	104.34	178.37	<a href="#">Baneerje (2012)</a>
	0.54137	15.512	50.064	104.35	178.36	<a href="#">Rossit y Laura (2001)</a>

Tabla 4.2: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea de sección uniforme, con masa adosada ( $M$  = variable y  $c_m = 0$ ) en  $x_m = 1$ .

La precisión para GDQM se obtiene de emplear  $N = 23$  nodos. En general, se observa una muy buena correlación entre los resultados. Los métodos de aproximación presentados no evidencian diferencias entre sí y, además, brindan mejor aproximación a la solución exacta que el trabajo de [Baneerje \(2012\)](#).

Como se indicó anteriormente, en este caso no se considera la inercia rotacional de la masa puntual adosada ( $c_m = 0$ ). Para modelarlo con GDQM, se debe tener en cuenta que es un problema en el que uno de los autovalores está en las condiciones de borde. Luego, las condiciones de borde del problema son:

$$V_i|_{i=1} = 0 ; \sum_{j=1}^N B_{ij}^1 V_j|_{i=1} = 0 ; \sum_{j=1}^N B_{ij}^2 V_j|_{i=N} = 0 ; -\frac{1}{M} \sum_{j=1}^N B_{ij}^3 V_j|_{i=N} = \Omega^2 V_i|_{i=N} . \quad (4.26)$$

Seguidamente, se procede a demostrar cómo se realiza el ensamblado correspondiente, partiendo de la Ec. (4.25) y para nueve nodos. Anteriormente, se estableció que las ecuaciones deben disponerse en forma ascendente, con respecto al orden de la derivada ( $q$ ) de los coeficientes de peso. Respetando esto, al nodo  $N-1=8$  le corresponde representar la condición de momento flector nulo y al nodo  $N=9$  considerar la inercia traslacional de la masa (esfuerzo de corte). Esto ha sido verificado mediante la implementación de algoritmos.

Entonces, en la implementación Ec. (4.27), la fila 4 pasa a ser la fila final (fila 9, para este ejemplo) y la columna 4 pasa a ser la columna final (columna 9, para este ejemplo). Por lo tanto, la submatriz  $B_{bb}$  queda de dimensión  $3 \times 3$  y  $B_{dd}$  de  $N-3 \times N-3$ .

$$(-1/M) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} & B_{18}^{(1)} & B_{13}^{(1)} & B_{14}^{(1)} & B_{15}^{(1)} & B_{16}^{(1)} & B_{17}^{(1)} & B_{19}^{(1)} & \\ B_{91}^{(2)} & B_{92}^{(2)} & B_{98}^{(2)} & B_{93}^{(2)} & B_{94}^{(2)} & B_{95}^{(2)} & B_{96}^{(2)} & B_{97}^{(2)} & B_{99}^{(2)} & \\ B_{31}^{(4)} & B_{32}^{(4)} & B_{38}^{(4)} & B_{33}^{(4)} & B_{34}^{(4)} & B_{35}^{(4)} & B_{36}^{(4)} & B_{37}^{(4)} & B_{39}^{(4)} & \\ B_{41}^{(4)} & B_{42}^{(4)} & B_{48}^{(4)} & B_{43}^{(4)} & B_{44}^{(4)} & B_{45}^{(4)} & B_{46}^{(4)} & B_{47}^{(4)} & B_{49}^{(4)} & \\ B_{51}^{(4)} & B_{52}^{(4)} & B_{58}^{(4)} & B_{53}^{(4)} & B_{54}^{(4)} & B_{55}^{(4)} & B_{56}^{(4)} & B_{57}^{(4)} & B_{59}^{(4)} & \\ B_{61}^{(4)} & B_{62}^{(4)} & B_{68}^{(4)} & B_{63}^{(4)} & B_{64}^{(4)} & B_{65}^{(4)} & B_{66}^{(4)} & B_{67}^{(4)} & B_{69}^{(4)} & \\ B_{71}^{(4)} & B_{72}^{(4)} & B_{78}^{(4)} & B_{73}^{(4)} & B_{74}^{(4)} & B_{75}^{(4)} & B_{76}^{(4)} & B_{77}^{(4)} & B_{79}^{(4)} & \\ B_{91}^{(3)} & B_{92}^{(3)} & B_{98}^{(3)} & B_{93}^{(3)} & B_{94}^{(3)} & B_{95}^{(3)} & B_{96}^{(3)} & B_{97}^{(3)} & B_{99}^{(3)} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_8 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_9 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

La última fila va multiplicada por  $(-1/M)$ , de acuerdo con la Ec. (4.26).

#### 4.3.1.3 Viga cantiléver AFG Ahusada

Finalmente, se emplea el caso de comparación empleado en 2.4.2.1. El mismo corresponde a una viga AFG Bernoulli-Euler de sección transversal rectangular y ahusada, estudiada por Shahba et al. (2011) y Shahba y Rajasekaran (2012). Para modelarlo, se debe recordar que se implementaron en las Ecs. (2.13), las siguientes funciones de distribución:

$$f_b = 1 - c_b x \quad \text{y} \quad f_h = 1 - c_h x \quad \text{con} \quad c_b = 1 - \frac{b_L}{b_0} \quad \text{y} \quad c_h = 1 - \frac{h_L}{h_0} \quad (4.28)$$

para la geometría, y para las propiedades del material AFG:

$$f_\rho = 1 + x + x^2 \quad \text{y} \quad f_E = 1 + x. \quad (4.29)$$

En la Tabla 4.3 se anexan, a los valores calculados en la Tabla 2.2, los primeros 2 coeficientes de frecuencia calculados por el GDQM.

$c_b$	0		0.2		0.4		0.6		0.8		Sol.
$c_h$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	
0	2.42556	18.6041	2.60542	19.0041	2.85075	19.5303	3.21368	20.2958	3.83105	21.6759	GDQM
	2.42556	18.6041	2.60542	19.0041	2.85075	19.5303	3.21368	20.2958	3.83105	21.6759	R-Ritz
	2.4256	18.6041	2.6054	19.0041	2.8507	19.5303	3.2137	20.2958	3.8310	21.6759	Shahba
0.2	2.50506	17.3802	2.68633	17.7501	2.93357	18.2379	3.29935	18.9501	3.92194	20.2432	GDQM
	2.50506	17.3802	2.68633	17.7501	2.93357	18.2379	3.29935	18.9501	3.92194	20.2432	R-Ritz
	2.5051	17.3801	2.6863	17.7501	2.9336	18.2379	3.2993	18.9501	3.9219	20.2432	Shahba
0.4	2.61547	16.0705	2.79874	16.4092	3.04857	16.8571	3.4181	17.5139	4.04714	18.7164	GDQM
	2.61547	16.0705	2.79874	16.4092	3.04857	16.8571	3.4181	17.5139	4.04714	18.7164	R-Ritz
	2.6155	16.0705	2.7987	16.4092	3.0486	16.8571	3.4181	17.5139	4.0471	18.7164	Shahba
0.6	2.78355	14.6508	2.96994	14.9567	3.22368	15.3627	3.59847	15.9616	4.23554	17.0694	GDQM
	2.78355	14.6508	2.96994	14.9567	3.22368	15.3627	3.59847	15.9616	4.23553	17.0694	R-Ritz
	2.7836	14.6508	2.9699	14.9567	3.2236	15.3627	3.5985	15.9616	4.2355	17.0694	Shahba
0.8	3.08711	13.1142	3.27943	13.3849	3.54015	13.7466	3.92322	14.2848	4.56947	15.2954	GDQM
	3.08711	13.1142	3.27943	13.3849	3.54015	13.7466	3.92322	14.2848	4.56946	15.2954	R-Ritz
	3.0871	13.1142	3.2794	13.3849	3.5401	13.7466	3.9232	14.2848	4.5695	15.2955	Shahba

Tabla 4.3: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG de sección ahusada,  $M = 0$ .

Nuevamente se aprecia una excelente correlación entre los resultados. Para este caso, se emplean  $N = 27$  nodos para GDQM, para obtener la misma precisión que en el método de Rayleigh-Ritz para los resultados. La complejidad que introduce el modelo de considerar a la sección transversal ahusada y con material AFG, requiere aumentar el número de nodos.

#### 4.3.2 Casos propuestos

Se continúa con la idea de rigidización dinámica, empleando el material AFG definido por Su et al., 2013 (Tabla 2.4). Se considera que tanto las características geométricas como las propiedades del material siguen variando con la ley establecida en la Ec. (2.12):

$$R(x) = R_0 \left( 1 + \left( \frac{R_L}{R_0} - 1 \right) x^n \right) \text{ con } f_R(x) = \left( 1 + \left( \frac{R_L}{R_0} - 1 \right) x^n \right) \text{ para } x \in [0,1], n \geq 0, \quad (4.30)$$

y con

$$\begin{aligned} E(x) &= E_0 f_E(x) & \rho(x) &= \rho_0 f_\rho(x) & A(x) &= A_0 f_A(x) & I(x) &= I_0 f_I(x) \\ b(x) &= b_0 f_b(x) & h(x) &= h_0 f_h(x) & f_A(x) &= f_b(x) \times f_h(x) & f_I(x) &= f_b(x) \times (f_h(x))^3 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Se comparan los valores hallados con el método de Rayleigh-Ritz, para algunos casos de vigas AFG sin masa y con masa puntual adosada. Además, se considera el coeficiente de peso de viga  $W_b$  definido en la Ec. (3.7).

##### 4.3.2.1 Viga cantiléver AFG de sección constante

Se implementa GDQM con el objetivo de verificar los resultados obtenidos para la viga AFG en voladizo de sección constante y sin masa. En la Tabla 4.4, se exponen los resultados para las composiciones a) Ac-Alum y b) Alum-Ac; para  $n = 1$  y  $n = 2$  en la Ec. (4.30).

$n$	Var. Material	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1	a) Ac-Alum	4.84848	30.1831	84.4216	165.366	273.306	GDQM
	$W_b = 0.754$	4.84848	30.1831	84.4216	165.366	273.306	M.R-Ritz
	b) Alum-Ac	4.78429	30.0155	84.1921	165.098	273.015	GDQM
	$W_b = 0.754$	4.78429	30.0155	84.1921	165.098	273.015	M.R-Ritz
2	a) Ac-Alum	4.39522	26.9186	75.7360	148.515	245.538	GDQM
	$W_b = 0.836$	4.39522	26.9186	75.7360	148.515	245.538	M.R-Ritz
	b) Alum-Ac	5.14207	33.6746	94.2766	184.475	304.664	GDQM
	$W_b = 0.672$	5.14207	33.6746	94.2766	184.475	304.664	M.R-Ritz

Tabla 4.4: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG de sección constante,  $M = 0$ .

La excelente correlación entre los resultados brinda validez a los nuevos casos generados, en los capítulos previos.

#### 4.3.2.2 Viga cantiléver AFG Ahusada sin masa

Seguidamente, se calculan los coeficientes de frecuencia para vigas AFG ahusadas, de ancho constante  $b = b_0$  y altura  $h$  variable. Se analiza, el comportamiento dinámico de la viga para cuando la altura varía de forma lineal y cuadrática, con  $n=1$  y  $n=2$  en la Ec. (4.30); y para el material AFG (Alum-Ac) con propiedades variando con  $n=2$  en la Ec. (4.30).

En la [Tabla 4.5](#), se exponen los primeros 5 coeficientes de frecuencia para cada caso.

$n$	$\frac{h_L}{h_0}$	Var. material	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1	0.8	Alum-Ac $W_b = 0.596$	5.26578	31.2825	85.2699	165.696	272.865	GDQM
			5.26578	31.2825	85.2699	165.696	272.865	M.R-Ritz
	0.6	Alum-Ac $W_b = 0.521$	5.43948	28.7201	75.7164	145.740	239.030	GDQM
			5.43948	28.7201	75.7164	145.740	239.030	M.R-Ritz
	0.4	Alum-Ac $W_b = 0.446$	5.70846	25.9275	65.3456	123.987	202.062	GDQM
			5.70846	25.9275	65.3456	123.987	202.062	M.R-Ritz
	0.2	Alum-Ac $W_b = 0.370$	6.21082	22.8349	53.5622	98.9632	159.266	GDQM
			6.21082	22.8349	53.5622	98.9633	159.266	M.R-Ritz
2	0.8	Alum-Ac $W_b = 0.618$	5.42919	32.5331	88.4712	171.828	282.910	GDQM
			5.42919	32.5331	88.4712	171.828	282.910	M.R-Ritz
	0.6	Alum-Ac $W_b = 0.565$	5.79886	31.3298	82.2380	158.085	259.131	GDQM
			5.79886	31.3298	82.2380	158.085	259.131	M.R-Ritz
	0.4	Alum-Ac $W_b = 0.511$	6.30429	30.1054	75.4274	142.748	232.329	GDQM
			6.30429	30.1054	75.4274	142.748	232.329	M.R-Ritz
	0.2	Alum-Ac $W_b = 0.458$	7.06696	29.0915	67.8702	124.799	200.248	GDQM
			7.06696	29.0915	67.8702	124.799	200.248	M.R-Ritz

Tabla 4.5: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac) con  $h$  variable,  $M = 0$ .

Del análisis de la [Tabla 4.5](#), se evidencia claramente que los coeficientes fundamentales aumentan al ir reduciendo la sección final, mientras que pasa lo contrario para los demás coeficientes. Cuando la altura varía cuadráticamente ( $n=2$ ) presenta una mayor rigidización dinámica, se observa que los coeficientes fundamentales aumentan más y los coeficientes mayores disminuyen menos, que cuando la altura varía linealmente ( $n=1$ ).

Por otro lado, se observa una excelente concordancia entre los valores calculados; los cuales se obtienen de emplear  $N_p = 20$  términos de polinomios en el método de Rayleigh-Ritz y  $N = 43$  nodos en GDQM. El hecho de tener que incrementar el número de nodos, para lograr la misma precisión entre los métodos, se debe nuevamente a la complejidad del modelo (considerar la sección transversal ahusada y material AFG con propiedades variando cuadráticamente ( $n=2$ )); especialmente en la medida que la relación de alturas disminuye.

#### 4.3.2.3 Viga cantiléver AFG Ahusada con masa

Seguidamente, se estudian algunos casos particulares del modelo (Figura 2.1), que permiten verificar los resultados hallados mediante GDQM. Vale recordar, que los resultados se expresan en referencia a una viga de sección constante y de acero ( $E_0 = E_{Ac}$ ,  $\rho_0 = \rho_{Ac}$ ).

**Caso I:** Se modela una viga homogénea de sección transversal constante, con una masa puntual en el extremo libre ( $M = 1$ ,  $c_m = 0$  y  $x_m = 1$ ). La misma fue considerada para analizar la convergencia del método de Rayleigh-Ritz, y aquí sirve de referencia para evidenciar la rigidización del material AFG. De acuerdo con la Ec. (3.7), la viga patrón coincide con la viga aquí modelada, por lo tanto, el coeficiente de peso de viga es  $W_b = 1$ .

En la Tabla 4.6, se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia naturales obtenidos.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1.55730	16.2501	50.8958	105.198	179.232	GDQM
1.55730	16.2501	50.8958	105.198	179.232	M.R-Ritz
1.55730	16.2501	50.8958	105.198	179.232	Maiz (2006)

Tabla 4.6: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea de sección constante,  $M = 1$  en  $x_m = 1$ .

**Caso II:** Se modela una viga AFG de sección transversal constante, con una masa puntual adosada en el extremo libre y sin considerar su inercia rotacional ( $M = 1$ ,  $c_m = 0$  y  $x_m = 1$ ). Las propiedades de las composiciones: a) Ac-Alum y b) Alum-Ac, se consideran variando linealmente (con  $n = 1$  en la Ec. (4.30)).

La Tabla 4.7, presenta los primeros 5 coeficientes de frecuencia naturales obtenidos. En la misma se evidencia numéricamente, que utilizar la composición b) Alum-Ac permite lograr un mayor efecto de rigidización dinámica. En cuanto a los resultados, se observa que existe una excelente concordancia de resultados entre los métodos. Se emplean  $N_p = 20$  términos de polinomios en el método de Rayleigh-Ritz y  $N = 43$  nodos en GDQM.

V. Material	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
Ac-Alum	1.76584	21.6925	68.9049	143.092	244.268	GDQM
$W_b = 0.754$	1.76584	21.6925	68.9049	143.092	244.269	M.R-Ritz
Alum-Ac	2.00860	21.9165	69.1331	143.303	244.470	GDQM
$W_b = 0.754$	2.00860	21.9165	69.1331	143.303	244.470	M.R-Ritz

Tabla 4.7: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG de sección constante, con  $M = 1$  en  $x_m = 1$ .

**Caso III:** Se modela una viga en voladizo AFG de sección transversal variable, con ancho constante  $b = b_0$  y altura  $h$  variando de forma parabólica y lineal. Es decir, con  $n = 0.5$ ,  $n = 2$



y  $n=1$  en la Ec. (4.30). Las propiedades del material AFG (Alum-Ac) se consideran variando linealmente (con  $n=1$  en la Ec. (4.30)) Además, se dispone una masa puntual adosada en su extremo libre, y nuevamente no se considera su inercia rotacional ( $M = 1$ ,  $c_m = 0$  y  $x_m = 1$ ).

En la [Tabla 4.8](#), se indican los primeros 5 coeficientes de frecuencia calculados para distintas vigas AFG de sección transversal ahusada.

$n$	$W_b$	$\frac{h_L}{h_0}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
0.5	0.556	0.8	1.74936	19.3285	60.1092	124.085	211.275	GDQM
			1.74944	19.3286	60.1091	124.085	211.275	M.R-Ritz
	0.466	0.6	1.46946	16.6566	50.7799	104.191	176.905	GDQM
			1.46953	16.6566	50.7799	104.191	176.905	M.R-Ritz
	0.376	0.4	1.16056	13.8367	40.9386	83.1882	140.615	GDQM
			1.16058	13.8366	40.9387	83.1882	140.615	M.R-Ritz
	0.285	0.2	0.80192	10.6973	30.0467	59.9437	100.460	GDQM
			0.80193	10.6973	30.0468	59.9437	100.460	M.R-Ritz
1	0.598	0.8	1.86959	20.0106	62.0709	128.217	218.443	GDQM
			1.86959	20.0106	62.0709	128.217	218.443	M.R-Ritz
	0.526	0.6	1.70292	17.9767	54.6165	112.238	190.820	GDQM
			1.70292	17.9767	54.6165	112.238	190.820	M.R-Ritz
	0.455	0.4	1.49387	15.7406	46.5377	94.8528	160.692	GDQM
			1.49387	15.7406	46.5377	94.8528	160.692	M.R-Ritz
	0.383	0.2	1.20530	13.1056	37.2390	74.7579	125.747	GDQM
			1.20530	13.1056	37.2390	74.7579	125.747	M.R-Ritz
2	0.644	0.8	1.96296	20.6263	64.0877	132.626	226.158	GDQM
			1.96296	20.6263	64.0877	132.626	226.158	M.R-Ritz
	0.593	0.6	1.90128	19.1612	58.6247	121.009	206.151	GDQM
			1.90128	19.1612	58.6247	121.009	206.151	M.R-Ritz
	0.542	0.4	1.81252	17.4215	52.5092	107.943	183.527	GDQM
			1.81252	17.4215	52.5092	107.943	183.527	M.R-Ritz
	0.491	0.2	1.66572	15.1454	45.1342	92.1362	155.980	GDQM
			1.66572	15.1454	45.1342	92.1362	155.980	M.R-Ritz

Tabla 4.8: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac) con  $h$  variable,  $M = 1$  en  $x_m = 1$ .

De la [Tabla 4.8](#), se observa que los coeficientes de frecuencia disminuyen por el hecho de adosar una masa en el extremo libre. En efecto, cuánto más pequeña sea la sección final mayor será la disminución de los coeficientes. Tal como se explicó en el Capítulo 2, esto se relaciona con la energía cinética que aporta la masa al balance energético.

En cuanto a la influencia de forma de la sección ([Figura 2.6](#)), se aprecia que los coeficientes de frecuencia son mayores, en todos los casos, para  $n = 2$  (Ec. (4.30)). Debido a que la viga se rigidiza más en comparación a lo que aumenta su peso, con relación a las otras variaciones. Por el contrario, los menores coeficientes de peso de viga se presentan para  $n = 0.5$ , pero a pesar de alivianar más la viga no logran rigidizar tanto como las demás.

Los resultados obtenidos tienen muy buena correspondencia entre sí. Para el método de

Rayleigh-Ritz se emplean  $N_p = 20$  términos de polinomios, en todos los casos. En cambio, para GDQM se emplean  $N = 43$  nodos, para  $n = 1$  y  $n = 2$  (Ec. (4.30)), mientras que para  $n = 0.5$  (Ec. (4.30)) hay que incrementar hasta  $N = 250$  nodos, para alcanzar valores próximos al coeficiente de frecuencia fundamental, en algunos casos.

En las cercanías del empotramiento (Figura 4.3) cuando la altura varía con  $n = 0.5$  (Ec. (4.30)), parecería que si bien el cambio de pendiente es suave, en la medida que el radio de curvatura aumenta, es decir, la relación de altura tiende a ser uniforme ( $(h_1 / h_0) \rightarrow 1$ ); GDQM tiene más dificultades para converger a la solución. Es decir, hay que densificar el mallado para que coeficientes obtengan la misma precisión que el método de Rayleigh-Ritz, para  $N_p = 20$ .

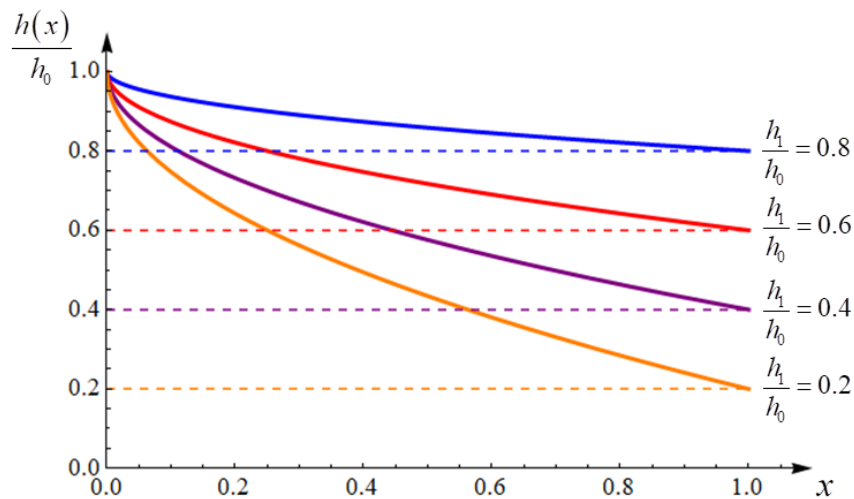


Figura 4.3: Variación de la altura  $h$  de la viga a lo largo de la longitud  $L$  para  $n = 0.5$ .

#### 4.4 REFERENCIAS

- Banerjee, J.R., Free vibration of beams carrying spring-mass systems - A dynamic stiffness approach. *Computers and Structures*, 104–105:21–26, 2012.
- Bellman, R. y Casti, J., Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical and Applications*, 34:235–238, 1971.
- Bert, C.W., Wang, X. y Striz, A.G., Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica*, 102:11–24, 1994.
- Bert, C.W. y Malik, M., Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review*, 49:1–28, 1996.
- Chang, C.-N., *Discrete Element Analysis Methods of Generic Differential Quadratures*. Springer, 2006.
- Du, H., Lim, M.K. y Lin, R.M., Application of generalized differential quadrature method to

- structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37: 1881–1896, 1994.
- Gilardi, G.J., Díaz Valdez, I.H., Bambill, D.V., Rossit, C.A. y Romero, F., Comportamiento dinámico de vigas constituidas por material funcionalmente graduado. V CAIM, (I-001:11 págs.). Publicado en las Actas del Congreso, 2016a.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Vibraciones de vigas construidas con material funcionalmente graduado que soportan masas adosadas. *Mecánica Computacional*, XXXIV: 529–544, 2016b.
- Gutiérrez, R.H., Laura, P.A.A. y Rossi, R.E., The method of differential quadrature and its application to the approximate solution of ocean engineering problems. *Ocean Engineering*, 21(1):57–66, 1994.
- Karami, G., Malekzadeh, P., y Shahpari, S., A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures*, 25:1169–1178, 2003.
- Karnovsky, I.A. y Lebed O.I., *Formulas for Structural Dynamics: Tables Graphs and Solutions*. McGraw-Hill, 2001.
- Liu, G.R. y Wu, T.Y. Vibration analysis of beams using the Generalized Differential Quadrature Rule and Domain Decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3):461–481, 2001.
- Rossit, C.A. y Laura, P.A.A., Free vibrations of a cantilever beam with a spring–mass system attached to the free end. *Ocean Engineering*, 28:933–939, 2001.
- Shahba, A. y Rajasekaran, S., Free vibration and stability of tapered Bernoulli-Euler beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical modelling*, 36:3094–3111, 2012.
- Shu, C. y Richards, B. E., Application of generalized differential quadrature to solve two dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15:791–798, 1992.
- Shu, C. y Chen, W., On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):239–257, 1999.
- Shu, C., *Differential Quadrature and Its Applications in Engineering*. Springer, 2000.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Vera, S.A., Febbo, M. y Laura, P.A.A., Comments on “A variable order approach to improve

- differential quadrature accuracy in dynamic analysis”. *Journal of Sound and Vibration*, 280:1149–1150, 2005.
- Wang, X., *Differential Quadrature and Differential Quadrature Based Element Methods: Theory and Applications*. Elsevier, 2015.
- Zong, Z., A variable order approach to improve differential quadrature accuracy in dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 266: 307–323, 2003.
- Zong, Z. y Zhang, Y.Y., *Advanced differential quadrature methods*. CRC Press, 2009.

# **CAPÍTULO 5**

## **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG DE DOS TRAMOS EN VOLADIZO QUE SOPORTAN UNA MASA ADOSADA**

### **MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ**

### **MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADA (GDQM)**

### **TEORÍA DE VIGAS DE BERNOULLI-EULER**

## 5.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha tratado la viga AFG en voladizo de un tramo, mediante el empleo de los métodos aproximados de Rayleigh-Ritz y GDQM. Sin embargo, en general se requiere generar otro tramo cuando existe alguna singularidad; ya sea en la variación: del material (por tipo o cambio de ley de distribución), de la geometría (escalón o cambio de forma) o bien se deba adosar una masa puntual en alguna posición arbitraria que no sea exclusivamente en uno de los extremos ( $0 < \bar{x} < L$ ). Un caso muy particular, sería que todas estas singularidades se produjeran en una misma coordenada  $\bar{x}$ .

Particularmente, el método de Rayleigh-Ritz admite no generar un nuevo tramo cuando se trata de masas puntuales adosadas, en posiciones comprendidas dentro de la longitud  $L$  de la viga, tal como se evidencia en el Capítulo 3. Las mismas se pueden contemplar sumando los términos correspondientes en la energía cinética de la viga (Ec. (3.1)); y cuyo efecto se incorpora a la matriz de masa al sistema.

## 5.2 CONSIDERACIONES GENERALES DEL MODELO DE ANÁLISIS

En la [Figura 5.1](#) se presenta el modelo de una viga en voladizo de dos tramos, escalonada y con una masa puntual  $m$  adosada en su extremo libre. La sección transversal de la viga es de doble simetría (rectangular), con ancho  $b$  y altura  $h$ ; ahusada en la dirección de su directriz y posee propiedades de material AFG en ambos tramos. El eje  $\bar{x}$  coincide con la línea recta que une los baricentros de todas las secciones transversales (en la posición sin deformar) y es normal al eje  $\bar{y}$  en el baricentro de la sección inicial, donde ambos tienen origen. Se denota con  $L$  a la longitud de la viga y con subíndices a las longitudes de los respectivos tramos.

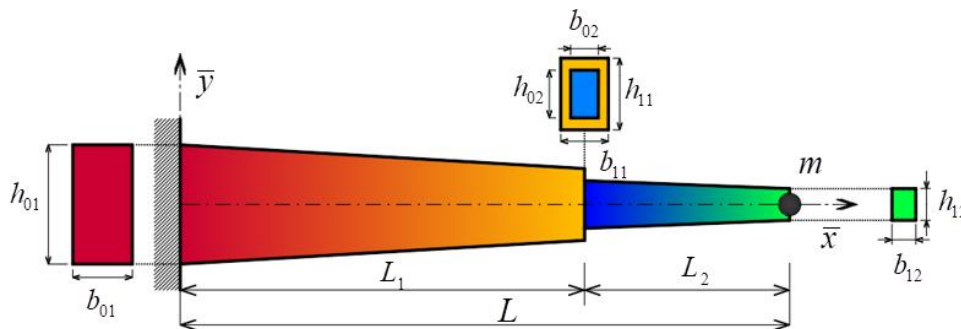


Figura 5.1: Viga AFG cantiléver de dos tramos ahusados con masa adosada en el extremo libre.

Las secciones extremas de cada tramo se identifican con un parámetro geométrico con dos subíndices. El primer subíndice indica la posición en el tramo: “0” para el extremo izquierdo y “1” para el derecho; y el segundo subíndice indica el tramo en consideración: “1” o “2”.

### 5.3 CARACTERÍSTICAS DE LA GEOMETRÍA Y DE LA GRADACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL EN LA VIGA

La particularidad de trabajar con vigas de las características geométricas descriptas y constituidas por materiales AFG, hace que sea necesario definir una expresión genérica que describa tanto la variación de la sección transversal, como la distribución de los materiales constituyentes. Generalizando la Ec. (2.11) para dos tramos, la misma adopta la forma:

$$R_k(\bar{x}) = R_{0k} f_{Rk}(\bar{x}) \quad \text{con } k=1,2. \quad (5.1)$$

En cada tramo  $k$ -ésimo,  $R_k(\bar{x})$  representa una característica de la viga (geométrica o del material) que varía en la dirección axial de la viga, desde un valor inicial  $R_{0k}$  y según una distribución  $f_{Rk}(\bar{x})$ .

Para el desarrollo de los cálculos se considera la adimensionalización de la coordenada espacial  $\bar{x}$  respecto de la longitud  $L$  de la viga. Además, se define la coordenada  $x_s$ , donde la sección presenta el escalón.

$$x = \frac{\bar{x}}{L} ; \quad x_s = \frac{L_1}{L} \quad (5.2)$$

Luego, generalizando la ley de variación axial asimétrica definida en la Ec. (2.12):

$$R_k(x) = R_{0k} \left( 1 + \left( \frac{R_{1k}}{R_{0k}} - 1 \right) x^{n_k} \right) \quad \text{sea} \quad f_{Rk}(x) = \left( 1 + \left( \frac{R_{1k}}{R_{0k}} - 1 \right) x^{n_k} \right) \quad \text{con } n_k \geq 0 \quad \text{y para } k=1,2 \quad (5.3)$$

se pueden expresar cualquiera de las siguientes propiedades del material y características geométricas:

$$\begin{aligned} E_k(x) &= E_{0k} f_{Ek}(x) & \rho_k(x) &= \rho_{0k} f_{\rho k}(x) & A_k(x) &= A_{0k} f_{Ak}(x) & I_k(x) &= I_{0k} f_{Ik}(x) \\ b_k(x) &= b_{0k} f_{bk}(x) & h_k(x) &= h_{0k} f_{hk}(x) & f_{Ak}(x) &= f_{bk}(x) \times f_{hk}(x) & f_{Ik}(x) &= f_{bk}(x) \times (f_{hk}(x))^3 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Las formas de  $f_{Ak}(x)$  y  $f_{Ik}(x)$  se deben a que la sección transversal es rectangular y maciza, para ambos tramos.

### 5.4 MÉTODOS APROXIMADOS

#### 5.4.1 Método de Rayleigh-Ritz

De acuerdo con lo citado en el Capítulo 2, el funcional de energía  $J$  (Ec. (2.6)) para el problema de vibraciones se escribe en términos de las energías  $U_{máx}$  y  $T_{máx}$ :

$$J = U_{m\acute{a}x} - T_{m\acute{a}x} . \quad (5.5)$$

Para el caso de la teoría de vigas de Bernoulli-Euler de dos tramos, adoptan las siguientes formas, considerando que el desplazamiento transversal aproximado es  $V_a(x)$ :

$$U_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{x_s} \frac{E_1(x) I_1(x)}{L} \left( \frac{d^2 V_a(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_{x_s}^1 \frac{E_2(x) I_2(x)}{L} \left( \frac{d^2 V_a(x)}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \quad (5.6)$$

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \int_0^{x_s} \rho_1(x) A_1(x) L^3 (V_a(x))^2 dx + \int_{x_s}^1 \rho_2(x) A_2(x) L^3 (V_a(x))^2 dx + m L^2 (V_a(x)|_{x=x_m})^2 \right\} \quad (5.7)$$

La Ec. (5.7) muestra que para este estudio no se considera la inercia rotacional de la masa puntual adosada ( $c_m = 0$ ). Por otra parte, los extremos de integración de las Ecs. (5.6) y (5.7) hacen necesario redefinir a la Ec. (5.3) en cada dominio  $[0, x_s]$  y  $[x_s, 1]$ :

$$\begin{aligned} R(x) &= R_{01} \left( 1 + \left( \frac{R_{11}}{R_{01}} - 1 \right) \left( \frac{x}{x_s} \right)^{\eta_1} \right) & R(x) &= R_{02} \left( 1 + \left( \frac{R_{12}}{R_{02}} - 1 \right) \left( \frac{x - x_s}{1 - x_s} \right)^{\eta_2} \right) \\ \text{con } x \in [0, x_s] & \text{ Tramo 1} & \text{con } x \in [x_s, 1] & \text{ Tramo 2.} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Reemplazando las Ecs. (5.6) y (5.7) en la Ec. (5.5), y considerando las Ecs. (5.4), el funcional de energía puede ser expresado de la siguiente manera:

$$J[V_a(x)] = \frac{E_{01} I_{01}}{2L} \left\{ \int_0^{x_s} f_{E1} f_{I1} (V_a'')^2 dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 f_{E2} f_{I2} (V_a'')^2 dx - \right. \\ \left. - \Omega^2 \left[ \int_0^{x_s} f_{\rho1} f_{A1} (V_a)^2 dx + C_\rho C_A \int_{x_s}^1 f_{\rho2} f_{A2} (V_a)^2 dx + M (V_a|_{x=1})^2 \right] \right\} \quad (5.9)$$

con

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}}, \quad M = \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L}, \quad C_E = \frac{E_{02}}{E_{01}}, \quad C_I = \frac{I_{02}}{I_{01}}, \quad C_\rho = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}, \quad C_A = \frac{A_{02}}{A_{01}}, \quad V_a' = \frac{dV_a}{dx}, \quad V_a'' = \frac{d^2 V_a}{dx^2};$$

donde  $x_m = 1$ , pues la masa puntual se considera adosada en el extremo libre. Al igual que para la viga de un tramo, el funcional  $J$  es minimizado respecto a cada constante arbitraria  $C_j$  (Ec. (2.16)), con lo que se da origen a un sistema de ecuaciones lineales. El determinante de la matriz  $\mathbf{R}$  resultante (Ec. (2.18)) permite obtener la ecuación de los coeficientes de frecuencia, con:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} . \quad (5.10)$$

Los elementos  $k_{ij}$  y  $m_{ij}$  que constituyen a las matrices de rigidez  $\mathbf{K}$  y de masa  $\mathbf{M}$ , respectivamente, adoptan para este caso las formas que siguen:



$$k_{ij} = \int_0^{x_s} f_{E1} f_{I1} \varphi_i'' \varphi_j'' dx + \int_{x_s}^1 f_{E2} f_{I2} \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad (5.11)$$

$$m_{ij} = \int_0^{x_s} f_{\rho1} f_{A1} \varphi_i \varphi_j dx + \int_{x_s}^1 f_{\rho2} f_{A2} \varphi_i \varphi_j dx + M \varphi_i|_{x=1} \varphi_j|_{x=1} \quad (5.12)$$

Luego, los autovalores del problema se obtienen de aplicar la condición de no-trivialidad a la Ec. (5.10), es decir, el determinante se iguala a cero. De acuerdo con la Ec. (2.22), entonces:

$$|\mathbf{KM}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{I}| = |\mathbf{B} - \zeta \mathbf{I}| = 0 \quad (5.13)$$

con  $\zeta = \Omega^2$  como los autovalores de la matriz  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{I}$  la matriz unidad.

Para este caso, al igual que en los Capítulos 2 y 3, se propone la función coordenada:

$$\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_p} = \{x^{j+1}\}_{j=1}^{N_p} \quad (5.14)$$

que satisface las condiciones de borde esenciales  $\varphi_{(x=0)} = \varphi'_{(x=0)} = 0$ , según requiere el método. Nótese que la función aproximante se utiliza para todo el dominio, no se discretiza por partes para cada subdominio o tramo. Por lo tanto, es evidente que tendrá dificultades para representar las singularidades impuestas en el material y la geometría; tales como cambios bruscos en las propiedades del material, variación de la sección transversal en forma de escalón, combinación de éstas, etc.

#### 5.4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)

Para analizar el comportamiento dinámico de la viga AFG de dos tramos, se considera como punto de partida a la expresión dada por la Ec. (4.15). Es decir, la ecuación gobernante que brinda la teoría de Bernoulli-Euler, independizada del tiempo, cuando la viga efectúa vibraciones libres según sus modos normales de vibración. Además, se contempla la coordenada espacial adimensionalizada respecto a la longitud de la viga (Ec. (5.2)).

Debido a que la viga AFG modelada es de dos tramos, el dominio de aplicación de la Ec. (4.15) puede ser expresado de forma segmentada como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ E_1(x) I_1(x) \frac{d^2 V_1(x)}{dx^2} \right] - \rho_1(x) A_1(x) L^4 \omega^2 V_1(x) &= 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_s \quad \text{Tramo 1} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[ E_2(x) I_2(x) \frac{d^2 V_2(x)}{dx^2} \right] - \rho_2(x) A_2(x) L^4 \omega^2 V_2(x) &= 0 \quad \text{para } x_s \leq x \leq 1 \quad \text{Tramo 2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Luego, reemplazando las Ecs. (5.4) en la Ec. (5.15) y desarrollando la regla de la cadena, se

llega a:

$$\begin{aligned} v_{11}(x) \frac{d^2 V_1(x)}{dx^2} + v_{21}(x) \frac{d^3 V_1(x)}{dx^3} + v_{31}(x) \frac{d^4 V_1(x)}{dx^4} &= \Omega^2 V_1(x) \quad \text{con} \quad \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}} \\ \chi \left[ v_{12}(x) \frac{d^2 V_2(x)}{dx^2} + v_{22}(x) \frac{d^3 V_2(x)}{dx^3} + v_{32}(x) \frac{d^4 V_2(x)}{dx^4} \right] &= \Omega^2 V_2(x) \quad \chi = \frac{C_E C_I}{C_\rho C_A} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Los  $v_{1k}(x)$ ,  $v_{2k}(x)$  y  $v_{3k}(x)$  con  $k=1,2$ , son los denominados coeficientes de forma, que permiten considerar las variaciones de las propiedades del material AFG y de la geometría, para cada tramo, en la ecuación diferencial gobernante. Los mismos tienen las siguientes expresiones:

$$v_{1k}(x) = \frac{f_{Ek}'' f_{Ik} + 2 f_{Ek}' f_{Ik}' + f_{Ek} f_{Ik}''}{f_{\rho k} f_{Ak}}; v_{2k}(x) = \frac{2(f_{Ek}' f_{Ik} + f_{Ek} f_{Ik}')}{f_{\rho k} f_{Ak}}; v_{3k}(x) = \frac{f_{Ek} f_{Ik}}{f_{\rho k} f_{Ak}} \quad (5.17)$$

con  $k=1,2$  y  $f_j' = df_j / dx$ .

Seguidamente, cada tramo de viga AFG se discretiza en una grilla de  $N_k$  nodos de prueba, siguiendo la distribución irregular del mallado propuesto por Chebyshev–Gauss–Lobato (Shu y Chen, 1999):

$$x_{ik} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{(i-1)\pi}{N_k - 1} \right) \right] \frac{L_k}{L} \quad \text{con} \quad i=1,2,\dots,N_k \quad \text{y} \quad k=1,2 \quad (5.18)$$

donde  $x_{ik}$  es la coordenada espacial que ubica al nodo  $i$  en el sub-dominio  $k$  de la viga. La derivada de orden  $(q)$  del desplazamiento  $V$  en el nodo  $i$  de la grilla para el tramo  $k$ -ésimo, de acuerdo con las reglas del método (Bert y Malik, 1996), se puede expresar como:

$$\left. \frac{d^q V_k}{dx^q} \right|_{x=x_{ik}} = \sum_{j=1}^{N_k} B_{ijk}^{(q)} V_{jk} \quad \text{con} \quad k=1,2. \quad (5.19)$$

donde  $V_{jk}$  es el desplazamiento del nodo  $j$  en el tramo  $k$ -ésimo, y  $B_{ijk}^{(q)}$  son los coeficientes de ponderación obtenidos a través de las funciones de interpolación de Lagrange y una serie de expresiones explícitas, algunas de ellas recursivas, (Karami et al., 2003):

$$\prod(x_{ik}) = \prod_{j=1 \text{ con } j \neq i}^{N_k} (x_{ik} - x_{jk}) \quad \text{con} \quad i, j=1,2,\dots,N_k \quad \text{para} \quad k=1,2 \quad (5.20)$$

$$B_{ijk}^{(1)} = \frac{\prod(x_{ik})}{(x_{ik} - x_{jk}) \prod(x_{jk})}, \quad q=1; \quad B_{ijk}^{(1)} = q \left[ B_{iik}^{(q-1)} B_{ijk}^{(1)} - \frac{B_{ijk}^{(q-1)}}{x_{ik} - x_{jk}} \right], \quad q>1 \quad i, j=1,2,\dots,N_k \quad \text{para} \quad i \neq j \quad (5.21)$$

$$B_{iik}^{(1)} = - \sum_{j=1 \text{ con } j \neq i}^N B_{ijk}^{(1)}, \quad q=1; \quad B_{iik}^{(q)} = - \sum_{j=1 \text{ con } j \neq i}^N B_{ijk}^{(q)}, \quad q>1 \quad i, j=1, 2, \dots, N_k \quad \text{para } i=j, \text{ con } k=1, 2 \quad (5.22)$$

Finalmente, se construye el sistema de ecuaciones análogas de cuadratura del problema, aplicando las reglas de cuadratura definidas por Bert y Malik (1996), a las expresiones que representan la ecuación diferencial gobernante, las condiciones de borde y de continuidad.

Para obtener la ecuación gobernante análoga de cuadratura se aplica la regla definida en la Ec. (5.19) a las Ecs. (5.16). De esta manera se obtiene:

$$\begin{aligned} \nu_{11}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(2)} V_{j1} + \nu_{21}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(3)} V_{j1} + \nu_{31}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(4)} V_{j1} &= \Omega^2 V_{i1} \\ \chi \left[ \nu_{12}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(2)} V_{j2} + \nu_{22}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(3)} V_{j2} + \nu_{32}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(4)} V_{j2} \right] &= \Omega^2 V_{i2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

con  $i=3, 4, \dots, N_k - 2$ ,  $k=1, 2$ .

Haciendo hincapié a lo aclarado en el Capítulo 4 (Ec. (4.19)), los nodos no utilizados para escribir la ecuación diferencial análoga, se reservan para representar a las condiciones de borde y de continuidad análogas.

De acuerdo con el modelo propuesto en la Figura 5.1, las condiciones de borde para la viga en voladizo (ver Anexo 1) adoptan las siguientes formas análogas:

En  $x=0$

$$\begin{cases} V_{i1}|_{i=1} = 0 \\ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{j1} \Big|_{i=1} = 0 \end{cases}$$

En  $x=1$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(2)} V_{j2} \Big|_{i=N_2} = 0 \\ \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(3)} V_{j2} \Big|_{i=N_2} = 0 \quad (\text{sin masa}) \\ -\frac{1}{M} C_E C_I \left[ \nu_{42}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(2)} V_{j2} \Big|_{i=N_2} + \nu_{52}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(3)} V_{j2} \Big|_{i=N_2} \right] = \Omega^2 V_{i2} \Big|_{i=N_2} \quad (\text{con masa}) \end{cases} \quad (5.24)$$

donde  $\nu_{4k}(x_{ik}) = f_{Ek}' f_{ik} + f_{Ek} f_{ik}'$ ;  $\nu_{5k}(x_{ik}) = f_{Ek} f_{ik}$  para  $k=1, 2$  y con  $f_j' = df_j / dx$ .

Además, las condiciones de continuidad (ver Anexo 1), para el desplazamiento, giro, momento flector y esfuerzo de corte, en su forma análoga son:

En  $x = x_s$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{i1} \Big|_{i=N_1} = V_{i2} \Big|_{i=1} \\ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{j1} \Big|_{i=N_1} = \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{j2} \Big|_{i=1} \\ v_{51}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(2)} V_{j1} \Big|_{i=N_1} = C_E C_I v_{52}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(2)} V_{j2} \Big|_{i=1} \\ \left( v_{41}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(2)} V_{j1} + v_{51}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(3)} V_{j1} \right) \Big|_{i=N_1} = C_E C_I \left( v_{42}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(2)} V_{j2} + v_{52}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(3)} V_{j2} \right) \Big|_{i=1} \end{array} \right. \quad (5.25)$$

donde  $v_{4k}(x_{ik}) = f_{Ek}' f_{Ik} + f_{Ek} f_{Ik}'$  ;  $v_{5k}(x_{ik}) = f_{Ek} f_{Ik}$  para  $k = 1, 2$  y con  $f_j' = df_j / dx$ .

Para las Ecs. (5.24) y (5.25),  $v_{4k}(x_{ik})$  y  $v_{5k}(x_{ik})$  son los coeficientes de forma para las condiciones de borde y continuidad. En la Ecs. (5.24),  $M$  es el coeficiente de masas que relaciona la masa puntual  $m$  con la masa de una viga de material homogéneo y de sección transversal constante (ambos parámetros asociados a la sección transversal inicial).

## 5.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Seguidamente, se analizan casos particulares de comparación y propuestos para el modelo de la Figura 5.1. Cabe acotar que algunos de los resultados aquí presentados, forman parte de la publicación de Gilardi et al. (2016).

### 5.5.1 Casos de comparación

Siguiendo con las pautas del Capítulo 2 (Ec. (2.25)), los valores de los coeficientes de frecuencia  $\Omega$  y de masa  $M$ , para las vigas de dos tramos, estarán referenciadas respecto a una viga patrón de acero y de sección constante. Para ambos coeficientes, se consideran en este caso las características geométricas  $(b_{01}, h_{01})$  y las propiedades del material  $(E_{01}, \rho_{01})$ , que constituyen a la sección inicial del primer tramo, tal como se aprecia en la Ec. (5.9).

Por otra parte, los valores de las alturas  $h_{11}$ ,  $h_{02}$  y  $h_{12}$  estarán dados en función de  $h_{01}$ . Y los respectivos anchos:  $b_{11}$ ,  $b_{02}$  y  $b_{12}$  en función de  $b_{01}$ .

#### 5.5.1.1 Viga homogénea en voladizo escalonada, con y sin masa

El caso en estudio corresponde a una viga homogénea en voladizo, escalonada en la coordenada adimensional  $x_s = 3/4$  (Figura 5.2). Ambos tramos son de sección transversal rectangular uniforme, con ancho  $b = b_{01}$ . La altura  $h$  para cada tramo, se corresponde con su

altura inicial. Es decir, para el primer tramo  $h_1 = h_{01}$  y para el segundo tramo  $h_2 = h_{02}$ . Recordar que los valores de  $h_{02}$  están dados en función de  $h_{01}$ .

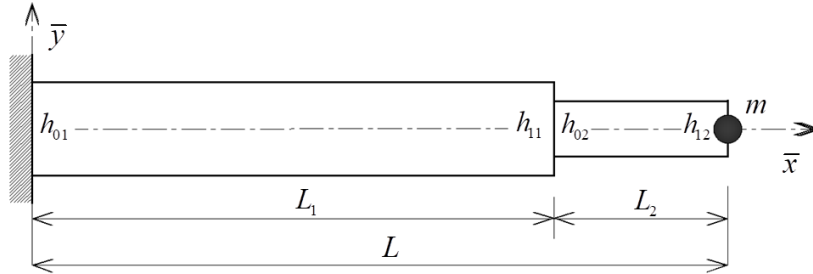


Figura 5.2: Viga cantiléver homogénea de 2 tramos con sección constante, escalonada en  $x_s = 3/4$ .

$M$	$h_1$	$h_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
0	1	0.8	3.78626	22.3511	59.0118	112.995	188.789	M.R-Ritz
			3.78613	22.3383	58.9212	112.907	188.788	GDQM
			3.78615	22.3383	58.9212	112.907	188.788	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>
	1	0.6	4.12717	22.4278	53.1908	103.862	177.734	M.R-Ritz
			4.12638	22.3294	52.7625	103.753	177.443	GDQM
			4.12637	22.3294	52.7625	103.753	177.443	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>
	1	0.4	4.57101	21.0203	43.7721	96.6427	156.463	M.R-Ritz
			4.56678	20.5203	43.1710	96.5715	152.685	GDQM
			4.56677	20.5203	43.1710	96.5715	152.685	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>
0.5	1	0.8	2.05467	16.2366	47.7964	99.1977	170.995	M.R-Ritz
			2.05443	16.2211	47.7416	99.1854	170.939	GDQM
			2.05444	16.2211	47.7416	99.1854	170.939	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>
	1	0.6	2.07845	14.7104	42.4061	93.0507	158.926	M.R-Ritz
			2.07642	14.6173	42.2524	93.0427	158.051	GDQM
			2.07642	14.6173	42.2524	93.0427	158.051	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>
	1	0.4	2.02566	11.4665	37.3643	86.6400	132.872	M.R-Ritz
			2.01248	11.2262	37.2805	85.8232	129.778	GDQM
			2.01248	11.2262	37.2805	85.8232	129.778	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>
1	1	0.8	1.57011	15.6086	47.1484	98.6317	170.384	M.R-Ritz
			1.56989	15.5934	47.0964	98.6212	170.324	GDQM
			1.56990	15.5934	47.0964	98.6212	170.324	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>
	1	0.6	1.56797	14.1464	42.0253	92.7374	158.459	M.R-Ritz
			1.56621	14.0574	41.8811	92.7274	157.572	GDQM
			1.56621	14.0574	41.8811	92.7274	157.572	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>
	1	0.4	1.49970	11.1006	37.2432	86.4352	132.583	M.R-Ritz
			1.48883	10.8765	37.1655	85.5991	129.509	GDQM
			1.48883	10.8765	37.1655	85.5991	129.509	<a href="#">Rossit et al. (2007)</a>

Tabla 5.1: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea de dos tramos, ambos de sección constante,  $b = b_{01} = b_{02}$ ,  $h_1 = h_{01}$  y  $h_2 = h_{02}$ . Escalón en  $x_s = 3/4$ ;  $M = 0$ ,  $M = 0.5$  y  $M = 1$  en  $x_m = 1$ .

[Rossit et al. \(2007\)](#), analizaron este caso y obtuvieron la solución exacta al problema, considerando la viga sin masa adosada ( $M = 0$ ) y con una masa puntual adosada ( $M = 0.5$  y

$M = 1$ ), sin contemplar su inercia rotatoria ( $c_m = 0$ ), en el extremo libre ( $x_m = 1$ ).

En la [Tabla 5.1](#), se muestran los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos por medio de los métodos de Rayleigh-Ritz y GDQM. Para la precisión en los resultados, se emplean  $N_p = 50$  términos de polinomios para el método de Rayleigh-Ritz y  $N_k = 18$  nodos (por tramo) para GDQM.

Contrastando los coeficientes de frecuencia obtenidos por los métodos aproximados con la solución exacta, se aprecia (en la [Tabla 5.1](#)) que el método de Rayleigh-Ritz presenta un error relativo porcentual mayor, en comparación al GDQM. El mismo se incrementa en la medida que la discontinuidad entre los tramos es mayor (o sea que la relación de alturas  $h_{11} / h_{02}$  se aleja de 1). Esto se debe al hecho de que la función aproximante se ha considerado continua para todo el dominio, y en presencia de singularidades (cambios bruscos) el polinomio no es capaz de representarlas correctamente. En consecuencia, frente a esta aproximación adoptada, resulta más apropiado utilizar el GDQM para obtener las soluciones de las vigas escalonadas.

Se aprecia, además, que error porcentual para el coeficiente de frecuencia fundamental crece aún más, cuando el peso de masa puntual adosada en el extremo de la viga aumenta y la sección final se reduce. Por otro lado, se verifica que el método de Rayleigh-Ritz sigue brindando cotas superiores de los valores buscados.

De la [Tabla 5.1](#) puede advertirse, además, que los primeros dos coeficientes de frecuencia, para la viga sin masa, aumentan cuando la viga presenta un escalón (ver también [Tabla 4.1](#)). El primer coeficiente adquiere mayor valor para la relación  $h_{02} / h_{01} = 0.4$ , mientras que el segundo se produce para  $h_{02} / h_{01} = 0.8$ . Para el caso de una masa adosada, sólo el primer coeficiente de frecuencia aumenta, cuando  $M = 0.5$  el valor máximo se obtiene para la relación  $h_{02} / h_{01} = 0.6$ , mientras que para  $M = 1$  se corresponde a la relación  $h_{02} / h_{01} = 0.8$  (ver también [Tabla 4.2](#)).

### 5.5.2 Casos propuestos

Se modelan algunos casos particulares de vigas escalonadas, con el objetivo de mostrar el alcance del modelo ([Figura 5.1](#)). Los casos elegidos consideran que las propiedades de los materiales AFG constituyentes varían linealmente ( $n_k = 1$ ), según la ley axial asimétrica generalizada en la Ec. (5.3). Al igual que en los capítulos anteriores, se plantea utilizar el FGM propuesto por [Su et al. \(2013\)](#), cuyas propiedades se detallan en la [Tabla 2.4](#). Por otro lado se prevé, que los tramos posean: ancho  $b$  y altura  $h$  constantes o bien variando linealmente, con

$n_k = 1$  en la Ec. (5.3), cualquiera de ellos. En todos los casos resueltos se considera,  $n_1 = n_2 = n$ .

### 5.5.2.1 Vigas escalonadas de sección constante

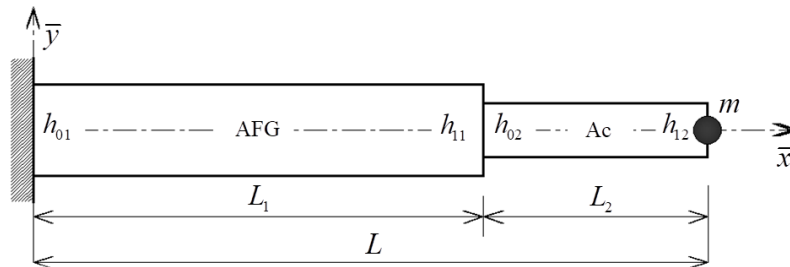


Figura 5.2: Viga cantiléver de 2 tramos con sección constante, escalonada en  $x_s = 2/3$ .

**Caso A:** Se eligió modelar un caso particular de viga escalonada, de dos tramos, desarrollada por [Gilardi et al. \(2014\)](#) (Figura 5.2). La viga, sin masa adosada ( $M = 0$ ) y con escalón en  $x_s = 2/3$ , es de sección transversal constante en ambos tramos, con  $b = b_{01} = b_{02}$  y  $h_1 = h_{01}$  y  $h_2 = 0.8 h_{01}$ . El primer tramo está compuesto por material AFG (Ac-Alum), con propiedades que varían linealmente (con  $n = 1$  en la Ec. (5.3)), y el segundo sólo por acero.

**Caso B:** Se modela la viga descrita en el Caso A, pero modificando la composición del material AFG a (Alum-Ac) en el primer tramo y conservando al acero en el segundo.

Los primeros 5 coeficientes de frecuencia para el Caso A y B se indican en la [Tabla 5.2](#).

Caso	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
A	4.42140	27.8618	65.9240	139.958	224.333	M.R-Ritz
	4.41970	27.7319	65.7695	139.820	223.240	GDQM
	4.41967	27.7316	65.7681	139.814	223.226	<a href="#">Gilardi et al. (2014)</a>
B	4.85618	25.5106	67.8594	136.888	223.109	M.R-Ritz
	4.85539	25.4711	67.8090	136.838	222.774	GDQM

Tabla 5.2: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de dos tramos, ambos de sección constante, con  $b = b_{01} = b_{02}$ ,  $h_1 = h_{01}$  y  $h_2 = 0.8 h_{01}$ . 1<sup>er</sup> tramo AFG y 2<sup>do</sup> de Ac. Escalón en  $x_s = 3/4$ ;  $M = 0$ .

Se aprecia que la composición Alum-Ac genera un mayor efecto de rigidización frente a la de Ac-Alum, en el primer y el tercer coeficiente de frecuencia.

Seguidamente, se calculan los casos A y B pero con una masa puntual ( $M = 1, c_m = 0$ ) en el extremo libre ( $x_m = 1$ ). Los primeros 5 coeficientes de frecuencia se encuentran en la [Tabla 5.3](#).

Comparando la [Tabla 5.2](#) (sin masa) con la [Tabla 5.3](#) (con masa), se observa que los coeficientes de frecuencia disminuyen al adosar la masa. En el Caso A y en el B, el primer coeficiente disminuye un 60%, el segundo un 32% y el tercero un 17%. Los resultados

expuestos en ambas tablas, se obtienen de emplear  $N_p = 50$  términos de polinomios para el método de Rayleigh- Ritz y  $N_k = 18$  nodos (por tramo) en GDQM.

Caso	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
A	1.74810	18.9003	54.8208	123.202	196.133	M.R-Ritz
	1.74644	18.8162	54.8014	122.816	195.517	GDQM
B	1.90756	17.5943	56.2372	118.603	198.930	M.R-Ritz
	1.90678	17.5700	56.2305	118.476	198.736	GDQM

Tabla 5.3: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de dos tramos, ambos de sección constante, con  $b = b_{01} = b_{02}$ ,  $h_1 = h_{01}$  y  $h_2 = 0.8h_{01}$ . 1<sup>er</sup> tramo AFG y 2<sup>do</sup> de Ac. Escalón en  $x_s = 3/4$ ;  $M = 1$  en  $x_m = 1$ .

### 5.5.2.2 Vigas de sección variable en el primer tramo y constante en el segundo

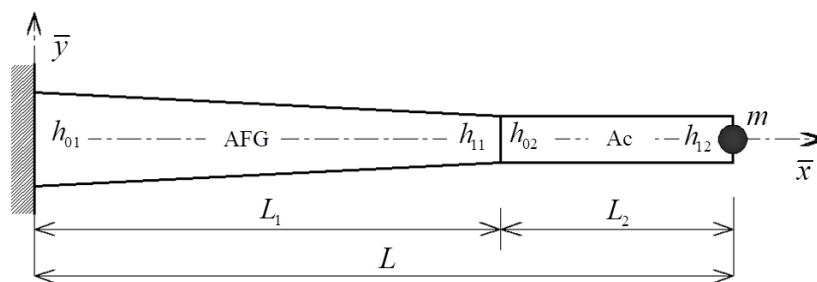


Figura 5.3: Viga cantiléver de 2 tramos, con igual área de sección transversal en la coordenada  $x = x_s$ .

La [Figura 5.3](#) presenta un nuevo modelo de viga de dos tramos. El primer tramo, constituido por material AFG (Alum-Ac), cuyas propiedades varían linealmente (con  $n = 1$  en la Ec. (5.3)), posee sección transversal ahusada con ancho constante  $b = b_{01}$  y altura  $h$  variando linealmente de  $h_{01}$  a  $h_{11}$ . El segundo tramo, constituido únicamente por acero (Ac), es de sección transversal constante (con  $b = b_{01} = b_{02}$  y  $h_2 = h_{02} = h_{11}$ ). La continuidad de los tramos puede presentarse en las coordenadas adimensionales:  $x_s = 1/2, 2/3$  y  $3/4$ .

En las [Tablas 5.4](#) y [5.5](#) se muestran los coeficientes de frecuencia calculados para la viga sin masa ( $M = 0$ ) y con masa ( $M = 1$ ,  $c_m = 0$  y en  $x_m = 1$ ), respectivamente. Se aprecia en ambas tablas, que los métodos tienen muy buena concordancia. Para la precisión de los resultados, se utilizan  $N_p = 50$  términos de polinomios en Rayleigh-Ritz y  $N_k = 18$  nodos (por tramo) en GDQM. Si bien cada tramo tiene sus características, en la coordenada  $x_s$  hay continuidad de las funciones (tanto geométricas como del material); esto le permite al método de Rayleigh-Ritz brindar, con una sola función aproximante, una muy buena precisión.

Por otra parte, se visualiza que cuando  $x_s = 3/4$  se logran los coeficientes de frecuencia



más altos, para  $M = 0$  cuando  $h_{11} / h_{01} = 0.4$  y para  $M = 1$  cuando  $h_{11} / h_{01} = 0.8$ .

$M$	$x_s$	$h_{01}$	$h_{11}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
0	1/2	1	0.8	4.12204	21.7198	60.9236	118.290	195.488	M.R-Ritz
				4.12204	21.7198	60.9235	118.290	195.487	GDQM
		1	0.6	3.83208	18.5107	49.8330	96.1688	157.528	M.R-Ritz
				3.83206	18.5106	49.8329	96.1686	157.527	GDQM
		1	0.4	3.29029	15.2078	37.7330	72.4209	116.883	M.R-Ritz
				3.29022	15.2077	37.7325	72.4207	116.881	GDQM
	2/3	1	0.8	4.44058	23.4762	64.8673	127.238	209.469	M.R-Ritz
				4.44058	23.4762	64.8673	127.238	209.469	GDQM
		1	0.6	4.39819	20.1392	54.3392	105.434	173.016	M.R-Ritz
				4.39819	20.1392	54.3392	105.434	173.015	GDQM
		1	0.4	4.24862	16.4159	42.8728	81.4233	133.377	M.R-Ritz
				4.24860	16.4157	42.8727	81.4229	133.377	GDQM
	3/4	1	0.8	4.56780	24.6644	67.0637	131.698	217.793	M.R-Ritz
				4.56780	24.6644	67.0637	131.698	217.793	GDQM
		1	0.6	4.61959	21.4884	56.6553	110.672	182.237	M.R-Ritz
				4.61959	21.4884	56.6553	110.672	182.237	GDQM
		1	0.4	4.66403	17.7633	45.2945	87.5271	142.905	M.R-Ritz
				4.66403	17.7632	45.2942	87.5270	142.904	GDQM

Tabla 5.4: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de 1<sup>er</sup> tramo AFG (Alum-Ac) y 2<sup>do</sup> de Ac, con  $b = b_{01} = b_{02}$ ,  $h_1$  con variación lineal de  $h_{01}$  a  $h_{11}$  y  $h_2 = h_{11}$ . Escalón en  $x_s$  variable, sin masa  $M = 0$ .

$M$	$x_s$	$h_{01}$	$h_{11}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1	1/2	1	0.8	1.57331	16.0278	49.9397	102.986	174.848	M.R-Ritz
				1.57331	16.0278	49.9397	102.986	174.848	GDQM
		1	0.6	1.23462	13.8227	40.8295	83.7710	140.899	M.R-Ritz
				1.23462	13.8226	40.8294	83.7710	140.898	GDQM
		1	0.4	0.82583	11.5534	31.1079	63.0306	104.828	M.R-Ritz
				0.82582	11.5534	31.1075	63.0305	104.826	GDQM
	2/3	1	0.8	1.69898	16.9201	53.5762	110.265	187.631	M.R-Ritz
				1.69898	16.9201	53.5762	110.265	187.631	GDQM
		1	0.6	1.42171	14.5863	44.9379	91.2400	155.072	M.R-Ritz
				1.42170	14.5863	44.9379	91.2399	155.072	GDQM
		1	0.4	1.05399	12.2364	35.4667	70.5150	119.684	M.R-Ritz
				1.05398	12.2363	35.4667	70.5144	119.684	GDQM
	3/4	1	0.8	1.75187	17.6175	55.1379	114.559	194.820	M.R-Ritz
				1.75187	17.6175	55.1379	114.559	194.820	GDQM
		1	0.6	1.50787	15.2464	46.6937	96.2020	162.825	M.R-Ritz
				1.50787	15.2464	46.6936	96.2020	162.824	GDQM
		1	0.4	1.17875	12.7400	37.5864	75.9569	127.664	M.R-Ritz
				1.17875	12.7399	37.5862	75.9569	127.664	GDQM

Tabla 5.5: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de 1<sup>er</sup> tramo AFG (Alum-Ac) y 2<sup>do</sup> de Ac, con  $b = b_{01} = b_{02}$ ,  $h_1$  con variación lineal de  $h_{01}$  a  $h_{11}$  y  $h_2 = h_{11}$ . Escalón en  $x_s$  variable, con masa  $M = 1$  en  $x_m = 1$ .

Para complementar el análisis de los coeficientes de frecuencia expuestos en las [Tablas 5.4](#) y [5.5](#), se representan en la [Figura 5.4](#) la variación de la masa y de la rigidez de la viga a lo largo de su longitud (adimensionalizada), en relación con una viga de acero de sección constante de ancho  $b = b_{01} = 1$  y altura  $h = h_{01} = 1$ .

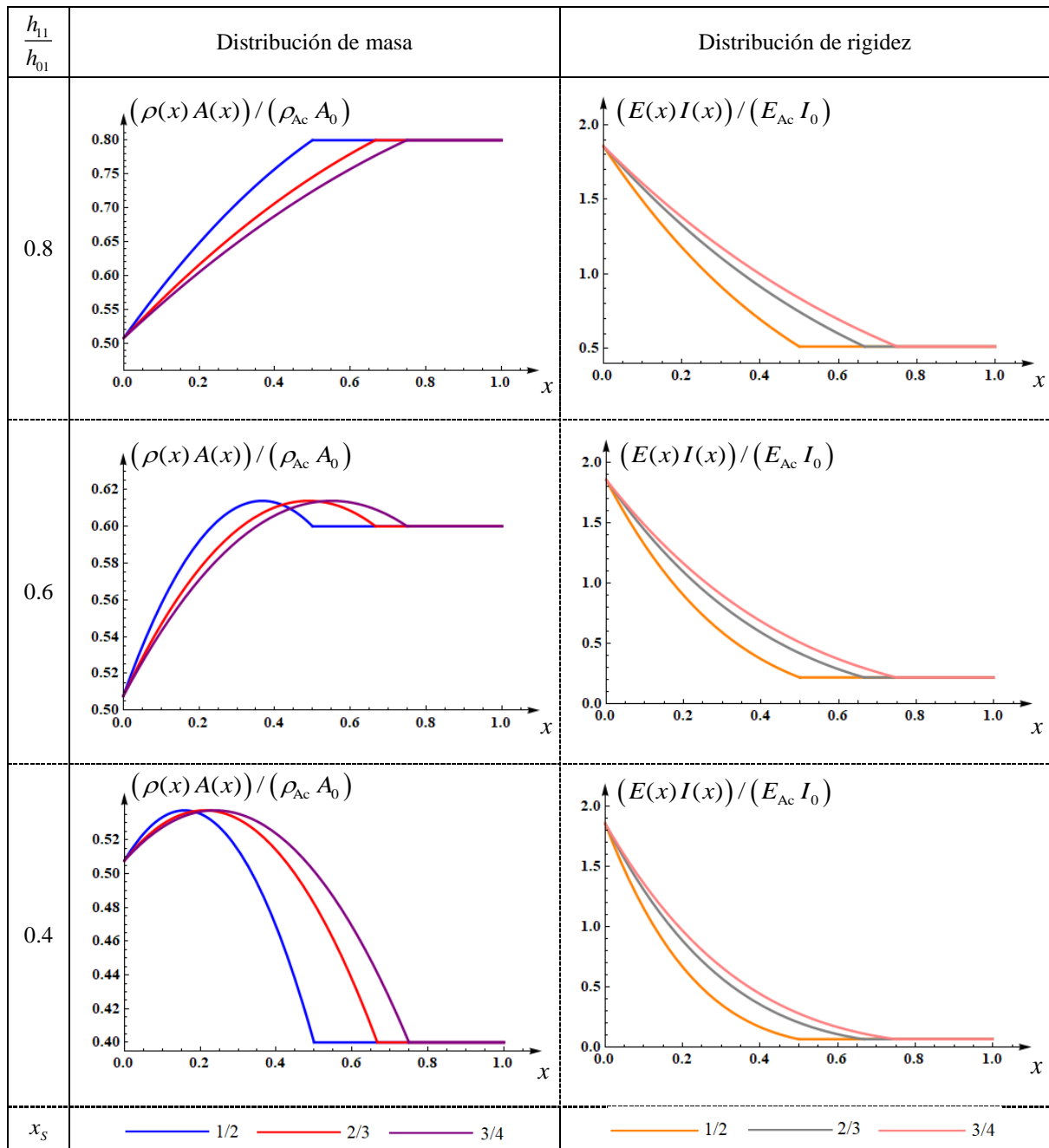


Figura 5.4: Distribución de masa y rigidez a lo largo de la viga de dos tramos.

Como se puede observar en la [Figura 5.4](#), cuanto más largo sea el tramo 1 (compuesto por el material AFG), mayor es la rigidización dinámica que se obtiene. Esto es debido a que el porcentaje de alúmina (más rígido y más liviano, que el acero) se puede distribuir en una mayor

longitud, rigidizando y aliviando a la viga, simultáneamente.

En el primer tramo, la rigidez disminuye desde el empotramiento hasta el encuentro de los tramos, donde permanece constante. Esto se debe a que tanto el módulo de Young del material AFG, como el momento de inercia  $I$  de la sección transversal disminuyen. El módulo de elasticidad longitudinal varía linealmente de  $E_{\text{Alum}} = 390 \text{ GPa}$  a  $E_{\text{Ac}} = 210 \text{ GPa}$ , y momento de inercia  $I$  decrece al reducirse la altura  $h$  de  $h_{01}$  a  $h_{11}$  (linealmente).

En cambio, la masa tiene el efecto opuesto, dado que va incrementando hasta alcanzar el tramo 2, donde está el acero (material más pesado), para permanecer constante. Para las relaciones de altura  $h_{02} / h_{01} = 0.6$  y  $h_{02} / h_{01} = 0.4$ , las curvas de masa crecen hasta alcanzar un valor máximo (donde el producto de densidad del material AFG y del área encuentra una combinación óptima frente, a otras instancias) y luego decae hasta alcanzar el valor de la masa del tramo homogéneo de acero. La ubicación de ese punto en el eje  $x$ , depende de la coordenada  $x_s$ , donde se produce el encuentro entre los tramos 1 y 2.

Seguidamente, se calculan los coeficientes de peso de viga  $W_b$  para las vigas cantiléver de dos tramos. Recordando la expresión definida en la Ec. (3.7), se puede escribir:

$$W_b = \frac{gL \left( \int_0^{x_s} \rho_1(x) b_1(x) h_1(x) dx + \int_{x_s}^1 \rho_2(x) b_2(x) h_2(x) dx \right)}{\rho_{\text{Ac}} g b_{01} h_{01} L} = \frac{\rho_{01}}{\rho_{\text{Ac}}} \left[ \int_0^{x_s} f_{\rho 1} f_{b 1} f_{h 1} dx + C_{\rho} C_A \int_{x_s}^1 f_{\rho 2} f_{b 2} f_{h 2} dx \right] \quad (5.26)$$

$$\text{con } C_b = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}, C_b = \frac{b_{02}}{b_{01}}, C_h = \frac{h_{02}}{h_{01}}; C_A = C_b \times C_h$$

En la [Tabla 5.6](#), se presentan los valores de  $W_b$ , calculados para cada caso.

		$x_s$		
		1/2	2/3	3/4
$h_{01}$	$h_{11}$	$W_b$		
1	0.80	0.7351	0.7135	0.7027
1	0.60	0.5933	0.5911	0.5900
1	0.57	0.5721	0.5728	0.5731
1	0.40	0.4515	0.4687	0.4773

Tabla 5.6: Coeficientes de peso de viga  $W_b$  para la viga cantiléver de dos tramos, con  $b = b_{01} = b_{02}$ ,  $h_1$  variando linealmente de  $h_{01}$  a  $h_{11}$  y  $h_2 = h_{11}$ .

Se aprecia que el coeficiente de peso de viga  $W_b$  disminuye, a medida que la longitud del primer tramo ( $L_1$ ) aumenta, tal como evidencian las relaciones  $h_{02} / h_{01} = 0.8$  y  $h_{02} / h_{01} = 0.6$ .

Sin embargo, para la relación  $h_{02} / h_{01} = 0.4$  se observa el efecto inverso. La relación de alturas  $h_{02} / h_{01} = 0.57$  se anexa a la [Tabla 5.6](#), para demostrar que a partir de dicha relación ocurre el efecto que se evidencia en  $h_{02} / h_{01} = 0.4$ .

### 5.5.2.3 Vigas escalonadas de sección variable en ambos tramos

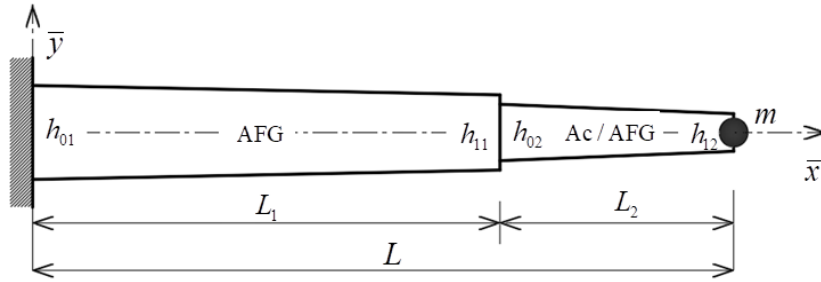


Figura 5.5: Viga cantiléver escalonada en  $x_s = 2/3$ , con 2 tramos de sección variable.

La [Figura 5.5](#) presenta un modelo de viga de dos tramos con sección transversal ahusada. El tramo 1, constituido por material AFG (Alum-Ac) y el tramo 2, puede estar constituido por acero (Ac) o por material AFG (Alum-Ac), dependiendo de lo que se considere en el cálculo. En cuanto a la geometría se plantean, seguidamente, dos situaciones:

- Tramo 1: ancho constante  $b_1 = b_{01}$  y altura variando linealmente de  $h_{01}$  a  $h_{11}$ .  
Tramo 2: ancho constante  $b_2 = b_{02}$  y altura variando linealmente de  $h_{02}$  a  $h_{12}$ .
- Tramo 1: ancho y altura con variación lineal, de  $b_{01}$  a  $b_{11}$  y de  $h_{01}$  a  $h_{11}$ , respectivamente.  
Tramo 2: ancho y altura con variación lineal, de  $b_{02}$  a  $b_{12}$  y de  $h_{02}$  a  $h_{12}$ , respectivamente.

El cambio de tramo se produce en la coordenada adimensional  $x_s = 2/3$  y para el material AFG se considera que las propiedades varían linealmente (con  $n = 1$  en la Ec. (5.3)).

#### 5.5.2.3.a Vigas escalonadas de ancho constante

Se modelan 6 ejemplos de vigas AFG, contemplando la posibilidad de una masa puntual adosada ( $M = 1$ ), sin contemplar su inercia rotatoria ( $c_m = 0$ ), en el extremo libre ( $x_m = 1$ ). Los tramos de viga constituidos por material AFG con composición Alum-Ac, son de ancho constante  $b_1 = b_{01} = b_{02}$  y la altura varia de forma lineal (con  $n = 1$  en la Ec. (5.3)) en cada tramo. De  $h_{01}$  a  $h_{11}$  en el primero y de  $h_{02}$  a  $h_{12}$  en el segundo. En todos los casos la viga presenta el escalón en  $x_s = 2/3$  y para cada geometría se analiza:

Caso (1): El primer tramo es de material AFG y el segundo homogéneo de acero.

Caso (2): Ambos tramos están constituidos por material AFG. La ley de variación no es una función gradual continua de  $x=0$  a  $x=1$ ; sino que se considera Alum-Ac ( $0 \leq x \leq x_s$ ) y Alum-Ac ( $x_s \leq x \leq 1$ ).

Se evidenció anteriormente, que cuando se presentan discontinuidades en la viga es más eficiente y factible emplear GDQM, frente a la solución que brinda el método de Rayleigh-Ritz con una única función aproximante continua (del extremo empotrado al libre). Por lo tanto, los primeros 5 coeficientes de frecuencia que se exponen en la [Tabla 5.7](#) (sin masa) y la [Tabla 5.8](#) (con masa) corresponden al GDQM.

$M$	$h_{01}$	$h_{11}$	$h_{02}$	$h_{12}$	Caso	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	1	0.8	0.6	0.6	(1)	4.94466	21.7692	57.3855	114.838	184.976
					(2)	5.43340	24.2636	67.3880	128.443	210.578
	1	0.6	0.4	0.4	(1)	5.02224	17.2783	46.6049	89.0908	145.301
					(2)	5.57655	19.9354	54.1584	101.220	167.025
	1	0.8	0.6	0.4	(1)	5.40493	22.0642	55.2397	107.982	172.839
					(2)	6.34467	23.9663	64.1256	120.729	197.341
	1	0.6	0.8	0.4	(1)	4.59542	21.9072	58.2658	107.015	175.158
					(2)	5.48131	22.4378	66.1078	120.919	191.519
	1	0.6	0.6	0.8	(1)	4.05674	19.9138	55.9070	110.440	181.837
					(2)	3.60609	23.9173	68.1420	124.598	204.061
	1	0.4	0.4	0.6	(1)	3.76840	16.3599	44.9626	87.5744	143.907
					(2)	2.99266	21.2739	55.9594	98.3819	166.320

Tabla 5.7: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de dos tramos, de sección ahusada, con  $b = b_{01} = b_{02}$ ,  $h_1$  y  $h_2$  variando linealmente. Escalón en  $x_s = 2/3$ , sin masa  $M = 0$ . Casos (1) y (2).

$M$	$h_{01}$	$h_{11}$	$h_{02}$	$h_{12}$	Caso	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
1	1	0.8	0.6	0.6	(1)	1.64634	14.9400	48.0289	98.5202	166.080
					(2)	1.71301	17.4799	55.4908	109.637	190.620
	1	0.6	0.4	0.4	(1)	1.27277	12.2484	39.2432	75.7363	132.007
					(2)	1.36490	14.4669	44.7954	86.4360	151.434
	1	0.8	0.6	0.4	(1)	1.61978	14.0092	45.0321	90.6112	154.431
					(2)	1.87473	15.3377	51.3414	101.073	176.920
	1	0.6	0.8	0.4	(1)	1.45488	14.9014	44.5866	89.1386	155.213
					(2)	1.65780	15.7228	51.6780	96.3835	173.340
	1	0.6	0.6	0.8	(1)	1.42440	15.0182	47.4006	96.8083	164.146
					(2)	1.12792	20.1127	57.1063	107.291	188.013
	1	0.4	0.4	0.6	(1)	1.07584	12.7541	38.3625	76.9945	130.366
					(2)	0.77253	18.3457	45.9939	86.7432	153.771

Tabla 5.8: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de dos tramos, de sección ahusada, con  $b = b_{01} = b_{02}$ ,  $h_1$  y  $h_2$  variando linealmente. Escalón en  $x_s = 2/3$ , con masa  $M = 1$  en  $x_m = 1$ . Casos (1) y (2).

En las [Tablas 5.7](#) y [5.8](#), se aprecia la rigidización dinámica que se logra al emplear material AFG en el segundo tramo, tanto cuando hay masa adosada como cuando no. Se nota, además,

la reducción de los coeficientes de frecuencia al acoplar la masa en el extremo libre. Para la precisión de los resultados, se emplean  $N_k = 18$  nodos (por tramo) en el GDQM.

### 5.5.2.3.b Vigas escalonadas de ancho y altura variables

Seguidamente, se presenta una extensión de los casos planteados en (5.5.2.3.a). Para el ahusamiento se considera que el ancho y altura de la sección transversal son iguales en los extremos de cada tramo, es decir :  $b_{01} = h_{01}$ ,  $b_{12} = h_{12}$ ,  $b_{02} = h_{02}$  y  $b_{11} = h_{11}$ . Análogamente, ante la discontinuidad presente, los coeficientes de frecuencia que se exponen en las [Tablas 5.9](#) y [5.10](#) corresponden al GDQM.

$M$	$h_{01}$	$h_{11}$	$h_{02}$	$h_{12}$	Caso	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
0	1	0.8	0.6	0.6	(1)	5.25880	20.8183	55.0886	106.043	173.362
					(2)	5.78505	22.7510	64.2241	119.141	193.256
	1	0.6	0.4	0.4	(1)	5.57703	17.5106	44.6864	82.3301	134.960
					(2)	6.23414	19.5165	52.2169	92.2600	153.084
	1	0.8	0.6	0.4	(1)	5.34571	19.6578	50.4450	90.8405	148.846
					(2)	6.32304	20.3084	57.4406	102.929	162.611
	1	0.6	0.8	0.4	(1)	4.47318	20.0714	54.5944	102.151	154.837
					(2)	5.38108	20.4501	59.6731	116.750	170.410
	1	0.6	0.6	0.8	(1)	4.92302	21.9151	59.7282	120.461	195.965
					(2)	3.85192	28.5903	75.0828	134.649	227.914
	1	0.4	0.4	0.6	(1)	5.00664	18.4457	50.2015	97.3318	158.695
					(2)	3.30290	27.0227	62.4353	111.340	192.441

Tabla 5.9: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de dos tramos, de sección ahusada, con  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $h_1$  y  $h_2$  variando linealmente. Escalón en  $x_s = 2/3$ , sin masa  $M = 0$ . Casos (1) y (2).

$M$	$h_{01}$	$h_{11}$	$h_{02}$	$h_{12}$	Caso	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
1	1	0.8	0.6	0.6	(1)	1.53906	15.0221	49.2254	98.0634	166.982
					(2)	1.61903	17.4844	56.4323	110.039	189.997
	1	0.6	0.4	0.4	(1)	1.00066	13.2631	41.5124	75.2651	135.482
					(2)	1.11164	15.1783	47.4007	86.2870	153.254
	1	0.8	0.6	0.4	(1)	1.47308	13.9575	46.7824	90.4237	156.350
					(2)	1.71825	15.1625	52.9686	101.932	177.252
	1	0.6	0.8	0.4	(1)	1.30515	15.4403	44.7203	89.6032	156.154
					(2)	1.47582	16.5474	51.6695	96.7153	174.147
	1	0.6	0.6	0.8	(1)	1.26978	15.8484	48.1148	97.7972	165.338
					(2)	0.88256	22.6903	58.7372	108.693	192.276
	1	0.4	0.4	0.6	(1)	0.82379	14.4892	39.5772	78.9564	132.505
					(2)	0.49952	22.0744	47.6193	90.2121	160.664

Tabla 5.10: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de dos tramos, de sección ahusada, con  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $h_1$  y  $h_2$  variando linealmente. Escalón en  $x_s = 2/3$ , con masa  $M = 1$  en  $x_m = 1$ . Casos (1) y (2).

En las [Tabla 5.9](#) (sin masa) y [5.10](#) (con masa), contrastando los coeficientes de frecuencia de los Casos (1) y (2), se observa la rigidización dinámica que se obtiene de implementar el

material AFG en el tramo 2. Se emplean  $N_k = 18$  nodos (por tramo) en el GDQM.

Comparando las Tablas 5.7 y 5.9 se visualiza que el angostamiento provoca que los coeficientes  $\Omega_1$  para las vigas sin masa aumenten, mientras que los demás coeficientes bajen. Por el contrario, de las Tablas 5.8 y 5.10, se aprecia que cuando la viga posee una masa adosa en su extremo libre, los coeficientes  $\Omega_1$  disminuyen y los restantes aumentan.

El hecho que  $\Omega_1$  aumente para las vigas sin masa, puede justificarse en que si bien la energía de deformación (Ec. (5.6)) y cinética (Ec. (5.7)) disminuyen, al reducirse el ancho  $b$  de la viga en ambos tramos, la energía cinética lo hace en mayor medida. Por lo cual, en el balance energético, los coeficientes de frecuencia son más altos en relación a la viga con ancho  $b$  constante. Contrariamente,  $\Omega_1$  disminuye para las vigas con masa, debido que está presente la masa adosada en el extremo libre, la misma contribuye con su energía cinética al sistema. Por lo cual, en este nuevo balance energético, hace los coeficientes fundamentales de frecuencia sean más bajos en relación a la viga con ancho  $b$  constante.

## 5.6 REFERENCIAS

- Bert, C.W. y Malik, M., Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review*, 49:1–28, 1996.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V., Rossit, C.A., Felix, D.H. y Rattazzi, A.R., Respuesta dinámica de vigas Timoshenko rotantes de materiales con propiedades variando funcionalmente. *Mecánica Computacional*, XXXIII: 1025–1039, 2014.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Vibraciones de vigas construidas con material funcionalmente graduado que soportan masas adosadas. *Mecánica Computacional*, XXXIV: 529–544, 2016.
- Karami, G., Malekzadeh, P., y Shahpari, S., A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures*, 25:1169–1178, 2003.
- Rossit, C.A., Maíz, S. y González, V.Y., Comportamiento dinámico de vigas de sección variable con masas adosadas. *Mecánica Computacional*, XXVI: 334–352, 2007.
- Shu, C. y Chen, W., On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):239–257, 1999.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.

# **CAPÍTULO 6**

## **VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG CON DISTINTAS CONDICIONES DE BORDE CLÁSICAS**

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (FEM)**

**MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL  
GENERALIZADA (GDQM)**

**MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ**

**TEORÍA DE VIGAS DE BERNOULLI-EULER**



## 6.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (FEM)

### 6.1.1 Introducción

El método de elementos finitos (FEM, sus siglas en inglés), por más novedoso que parezca, existe en su forma conceptual desde hace ya miles de años y básicamente consiste en resolver un problema de dominio continuo, mediante un conjunto de elementos discretos. Históricamente, la discretización ha sido utilizada: por los egipcios para determinar el volumen de las pirámides, por los antiguos matemáticos para predecir el valor de  $\pi$  en forma bastante aproximada, por Arquímedes (287-212 a.C.) para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos; e incluso, en las bases del cálculo diferencial e integral por Sir I. Newton (1642-1727) y G. Leibniz (1646-1716).

La discretización de los problemas ha sido abordada de una manera muy distinta por los matemáticos y los ingenieros, los primeros desarrollando técnicas aplicables directamente a las ecuaciones diferenciales del problema y los segundos enfrentándose al problema más intuitivamente ([Zienkiewicz et al., 2005](#)). A pesar de ello, la matemática y la ingeniería constituyen los pilares fundamentales sobre los que se funda el método.

Desde el punto de vista ingenieril, FEM surge ante la necesidad de resolver problemas complejos de la elasticidad en el análisis estructural (ingeniería civil, mecánica y aeronáutica). Su desarrollo inicia con los trabajos de [Hrenikoff \(1941\)](#), [McHenry \(1943\)](#) y [Newmark \(1949\)](#). [Courant \(1943\)](#) extendería el método de Ritz ([Ritz \(1909\)](#)) introduciendo funciones seccionalmente continuas, definidas sobre áreas triangulares. Esto le permitiría satisfacer las condiciones de contorno, en un número finito de puntos sobre el contorno y además, superaría las severas limitaciones que restringían la aplicación del método de Ritz en problemas con dominios de forma geométrica relativamente simples.

Los aportes de [Levy \(1947,1953\)](#), [Argyris y Kelsey \(1955\)](#) y [Turner et al. \(1956\)](#), fueron muy importantes para el método. Sin embargo, sería [Clough \(1960\)](#) quien introduciría, por primera vez, el término “elemento finito” y presentaría al método como una extensión de las técnicas de análisis estructural, en la solución de problemas de la mecánica del continuo ([Davies, 2011](#)).

La razón por la cual el método de elementos finitos tuvo tanto auge se debió a que simultáneamente, en la década de los sesenta, se dio el gran desarrollo del computador digital (ordenador); permitiéndole al método efectuar la gran cantidad de operaciones que demandaba, en forma rápida y precisa ([Rao, 2011](#)). Paralelamente, comenzaron a crearse paquetes computacionales de elementos finitos, entre los primeros surgió NASTRAN el cual fue un punto

de partida para la generación de paquetes computacionales como ANSYS, ABAQUS, ALGOR, COMSOL, entre otros.

El método tuvo un progreso asombroso en los años siguientes. Se aplicó con éxito, en innumerables problemas: tridimensionales, no lineales (geométricos y/o físicos), etc.; e incluso su campo de acción se extendió a otras áreas, tales como análisis de: flujo de fluidos, transferencia de calor, campos eléctricos y magnéticos, robótica, biomecánica, etc. En la actualidad, sin lugar a duda, es uno de los métodos más empleados en el campo de la investigación para el desarrollo científico e industrial.

### **6.1.2 Esencia del método**

Investigadores, tanto del campo de la mecánica del continuo como del análisis estructural, han reconocido a FEM como una extensión del método de Rayleigh-Ritz. Pero que, a diferencia de éste, sortea sus dificultades cambiando la perspectiva de cómo se definen las funciones aproximantes (Zienkiewicz, 1980; Cook, 1981; Bathe, 1982; Petyt, 1990; Rossi, 2007).

En pocas palabras FEM es un método de aproximación de problemas continuos, de manera tal que (Zienkiewicz y Taylor, 1994):

- El dominio continuo se divide en un número finito de partes, “elementos”, cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros asociados a puntos característicos denominados “nodos”. Estos nodos son puntos que unen a cada elemento con sus adyacentes.
- La discretización en elementos finitos simplifica la tarea de generar las funciones de aproximación, a la vez que permite la representación de la solución sobre los elementos individuales. Es decir, el comportamiento en el interior de cada elemento queda definido a partir del comportamiento de los nodos mediante las adecuadas funciones de interpolación o funciones de forma. Además, esto indica que las discontinuidades geométricas y / o materiales pueden incluirse naturalmente.
- Las incógnitas del problema dejan de ser funciones matemáticas y pasan a ser los valores de estas funciones en los nodos. La construcción de las funciones de aproximación es sistemática (a menudo polinomios algebraicos que se desarrollan usando ideas de la teoría de interpolación) y el proceso es independiente de las condiciones de frontera y los datos del problema.
- La solución del sistema completo sigue las reglas de los problemas discretos. El sistema completo se forma por ensamblaje de los elementos.

“El método es modular y, por lo tanto, es adecuado para el cálculo electrónico y el desarrollo de programas informáticos de uso general” (Reddy, 2002).

## 6.2 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA

### 6.2.1 Modelo

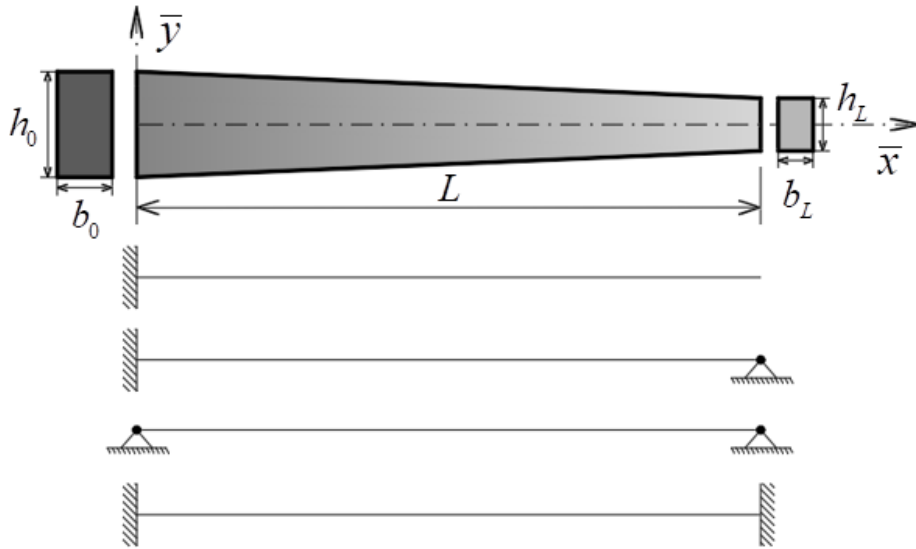


Figura 6.1: Viga AFG de sección variable con distintas condiciones de borde clásicas.

Se estudian las vibraciones libres de vigas AFG Bernoulli-Euler de sección variable, de un tramo, sin masa adosada ( $M = 0$ ) y para las distintas combinaciones de condiciones de borde clásicas que se indican en la Figura 6.1. (Ver Anexo 1).

### 6.2.2 Desarrollo del elemento

Si bien se analiza la vibración libre de vigas AFG, las funciones de interpolación se determinan a partir de una viga de material homogéneo y de sección transversal uniforme. De esta forma se logra, que ellas sean siempre las mismas para cada elemento. Luego, la variación de las propiedades del material y de las características geométricas se contemplan en las energías de deformación y cinética del elemento.

#### ❖ Elemento Bernoulli-Euler de 2 nodos (EB2N)

La Figura 6.2 muestra al elemento viga más simple, denominado como EB2N, de longitud  $\ell = 2a$  y con 2 nodos ubicados en sus extremos. Cada nodo posee dos grados de libertad (GL) independientes: el desplazamiento  $v$  y la derivada primera del desplazamiento  $\partial v / \partial \bar{x}$ . Esto se fundamenta en que se deben considerar como incógnitas, en cada nodo, los valores del desplazamiento y las sucesivas derivadas hasta el orden que intervienen en las condiciones de

borde esenciales del problema. Cada incógnita constituye un grado de libertad del modelo discreto, (Rossi, 2007). Entonces, para que la función aproximante quede uniformemente definida debe contener 4 parámetros, uno por cada uno de los 4 grados de libertad, lo que implica adoptar un polinomio completo de tercer grado.

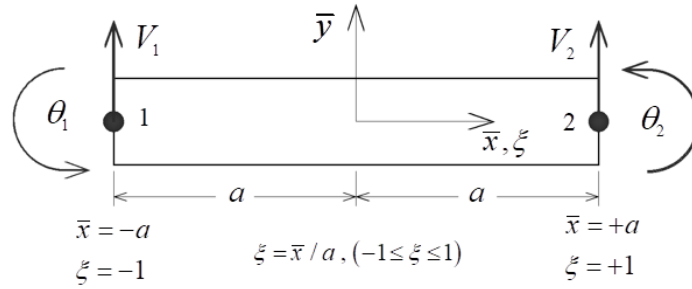


Figura 6.2: Elemento viga EB2N.

De la ecuación diferencial gobernante de vibraciones transversales libres para una viga Bernoulli-Euler homogénea y de sección transversal uniforme (Ec. (1.6)):

$$EI \frac{\partial^4 v(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (6.1)$$

que vibra según sus modos normales, con  $v(\bar{x}, t) = \bar{V}(\bar{x}) \cos(\omega t)$ . Se puede visualizar, que si se elimina la variable temporal de la Ec. (6.1), lo que se obtiene es la ecuación de equilibrio estático para una viga sin carga en el tramo:

$$EI \frac{d^4 \bar{V}(\bar{x})}{d\bar{x}^4} = 0. \quad (6.2)$$

cuya solución es un polinomio de tercer grado completo. En consecuencia, se puede intuir que las funciones de forma adoptarán la configuración de las elásticas para esta situación.

Adimensionalizando la amplitud del desplazamiento  $\bar{V}(\bar{x})$  y la coordenada espacial  $\bar{x}$  con respecto a la semi-longitud del elemento,  $a$ :

$$\xi = \frac{\bar{x}}{a}; \quad V(\xi) = \frac{\bar{V}(\bar{x})}{a}, \quad (6.3)$$

siendo  $\xi$  la variable espacial adimensional. Entonces, la solución de la Ec. (6.2) es:

$$V(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3, \quad (6.4)$$

donde  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$  son coeficientes dimensionalmente homogéneos.

Luego, derivando la Ec. (6.4) se obtiene la rotación (el giro  $\theta$ ) de la sección transversal:

$$\theta(\xi) = \frac{d\bar{V}(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{dV(\xi)}{d\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2. \quad (6.5)$$

Seguidamente, los 4 GL del elemento, expresados según las Ecs. (6.4) y (6.5), se agrupan en el vector de desplazamientos nodales:

$$\{\delta_e\}' = [V_1 \quad \theta_1 \quad V_2 \quad \theta_2]. \quad (6.6)$$

Las expresiones de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en función de los coeficientes ( $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ ) se obtienen de evaluar al polinomio en  $\xi = -1$  y  $\xi = 1$ , en las Ecs. (6.4) y (6.5). Agrupando estas expresiones, se llega al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ V_2 &= V(+1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \theta_1 &= \theta(-1) = a_1 - 2a_2 + 3a_3 \\ \theta_2 &= \theta(+1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \end{aligned} \quad (6.7)$$

el cual, al ser resuelto permite ahora expresar los coeficientes ( $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ ), en función de variables  $V_1$ ,  $\theta_1$ ,  $V_2$  y  $\theta_2$ . Omitiendo el proceso algebraico intermedio, se llega a :

$$a_0 = \frac{1}{4}(2V_1 + 2V_2 + \theta_1 - \theta_2); a_1 = \frac{1}{4}(-3V_1 + 3V_2 - \theta_1 - \theta_2); a_2 = \frac{1}{4}(-\theta_1 + \theta_2); a_3 = \frac{1}{4}(V_1 - V_2 + \theta_1 + \theta_2) \quad (6.8)$$

Reemplazando las expresiones de la Ec. (6.8) en la Ec. (6.4) y reagrupando términos, se puede finalmente escribir en la forma matricial que sigue:

$$V(\xi) = [F_1(\xi) \quad F_2(\xi) \quad F_3(\xi) \quad F_4(\xi)] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [F(\xi)] \{\delta_e\}; \quad (6.9)$$

donde  $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\xi)$ ,  $F_3(\xi)$  y  $F_4(\xi)$  son las 4 funciones de forma del elemento, cuyo aspecto es:

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= \frac{1}{4} [2 - 3\xi + \xi^3] \\ F_2(\xi) &= \frac{1}{4} [1 - \xi - \xi^2 + \xi^3] \\ F_3(\xi) &= \frac{1}{4} [2 + 3\xi - \xi^3] \\ F_4(\xi) &= \frac{1}{4} [-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3] \end{aligned} \quad (6.10)$$

Luego, las funciones de forma obtenidas para el elemento EB2N (Ec. (6.10)) pueden expresarse

por medio del vector:

$$F(\xi) = [F_1(\xi) \ F_2(\xi) \ F_3(\xi) \ F_4(\xi)]. \quad (6.11)$$

Realizando las gráficas de cada una de las funciones de forma, [Figura 6.3](#), se puede comprobar que adoptan la configuración de las elásticas de una viga sin carga, cuando se imponen (en sus extremos) desplazamientos transversales y rotacionales de valor unitario.

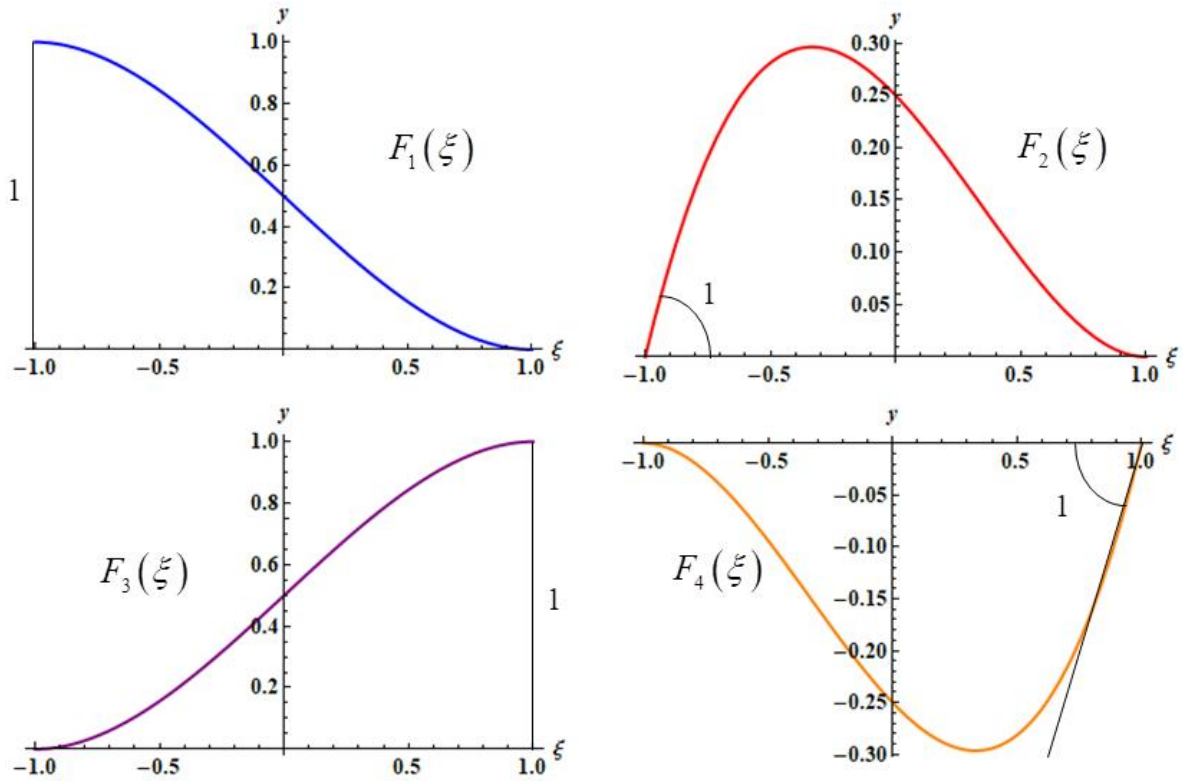


Figura 6.3: Funciones de forma del elemento viga EB2N.

### ❖ Elemento Bernoulli-Euler de 3 nodos (EB3N)

A continuación, se presenta el elemento Bernoulli-Euler de 3 nodos (EB3N). Este elemento surge como una extensión del anterior, EB2N, incorporando un tercer nodo en el punto medio del elemento y por ende 2 GL más al vector de desplazamientos nodales ([Rossi, 2007](#)). El mismo adopta la forma:

$$\{\delta_e\}^t = [V_1 \ \theta_1 \ V_2 \ \theta_2 \ V_3 \ \theta_3]. \quad (6.12)$$

Por lo tanto, la función aproximante es un polinomio completo de quinto grado:

$$V(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 \quad (6.13)$$

y el giro  $\theta$  de la sección transversal se obtiene derivando la Ec. (6.13):

$$\theta(\xi) = \frac{dV(\xi)}{d\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + 4a_4\xi^3 + 5a_5\xi^4. \quad (6.14)$$

Luego, los 6 GL quedan expresados como:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \\ V_2 &= V(0) = a_0 \\ V_3 &= V(+1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ \theta_1 &= \theta(-1) = a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 + 5a_5 \\ \theta_2 &= \theta(0) = a_1 \\ \theta_3 &= \theta(+1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Resolviendo el sistema de las Ecs. (6.15) se obtienen los coeficientes  $a_i$  (con  $i = 0$  a  $3$ ), en función de los desplazamientos  $V_i$  y giros  $\theta_i$  (con  $i = 0$  a  $3$ ), los cuales al sustituirse en la Ec. (6.13) permiten obtener las siguientes 6 funciones de forma:

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^2 [4 - 5\xi - 2\xi^2 + 3\xi^3] \\ F_2(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^2 [1 - \xi - \xi^2 + \xi^3] \\ F_3(\xi) &= 1 - 2\xi + \xi^4 \\ F_4(\xi) &= \xi [1 - 2\xi + \xi^4] \\ F_5(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^2 [4 + 5\xi - 2\xi^2 - 3\xi^3] \\ F_6(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^2 [-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Finalmente, las funciones de forma obtenidas para el elemento EB3N (Ec. (6.16)) pueden expresarse por medio del vector:

$$F(\xi) = [F_1(\xi) \ F_2(\xi) \ F_3(\xi) \ F_4(\xi) \ F_5(\xi) \ F_6(\xi)] \quad (6.17)$$

### ❖ Matrices de los elementos

Seguidamente, es posible escribir las matrices de rigidez  $[k_e]$  y de masa  $[m_e]$  de los elementos, EB2N o EB3N en forma análoga. El procedimiento es independiente del elemento a utilizar. Para considerar cada caso, sólo hay que reemplazar en las expresiones de las energías del sistema, energías de deformación y cinética máximas ( $U_{máx}$  y  $T_{máx}$ ), a las funciones desplazamiento por las funciones de forma correspondientes.

En primer lugar, se obtiene la matriz de rigidez. Es necesario, entonces, considerar la energía de deformación del elemento (expresada en forma independiente del tiempo):

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a E(\bar{x}) I(\bar{x}) \left( \frac{d^2 \bar{V}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right)^2 d\bar{x} \quad (6.18)$$

Adimensionalizando la Ec. (6.17), según las Ecs. (6.3), se llega a:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{E(\xi) I(\xi)}{a^2} \left( \frac{d^2 V(\xi)}{d\xi^2} \right)^2 a d\xi. \quad (6.19)$$

Luego, la derivada del desplazamiento  $V(\xi)$  se expresa en términos del vector  $[F(\xi)]$  y de sus derivadas

$$(V''(\xi))^2 = \{\delta_e\}' [F''(\xi)]' [F''(\xi)] \{\delta_e\} \quad \text{con} \quad V''(\xi) = \frac{d^2 V(\xi)}{d\xi^2}. \quad (6.20)$$

donde  $\{\delta_e\}'$  es el traspuesto del vector desplazamiento  $\{\delta_e\}$  y  $[F''(\xi)]'$  el traspuesto de la derivada segunda del vector  $[F''(\xi)]$ .

Reemplazando la Ec. (6.20) en la Ec. (6.19), se obtiene:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 E(\xi) I(\xi) \{\delta_e\}' [F''(\xi)]' [F''(\xi)] \{\delta_e\} d\xi \\ &= \frac{1}{2a} \{\delta_e\}' \int_{-1}^1 E(\xi) I(\xi) [F''(\xi)]' [F''(\xi)] d\xi \{\delta_e\} \\ &= \frac{1}{2} \{\delta_e\}' [k_e] \{\delta_e\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

con

$$[k_e] = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 E(\xi) I(\xi) [F''(\xi)]' [F''(\xi)] d\xi. \quad (6.22)$$

Para obtener la matriz de masa, se debe considerar la energía cinética del elemento (expresada en forma independiente del tiempo):

$$T_e = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{-a}^a \rho(\bar{x}) A(\bar{x}) (\bar{V}(\bar{x}))^2 d\bar{x} \quad (6.23)$$

Adimensionalizando, según las Ecs. (6.3), la Ec. (6.23) adopta la forma:

$$T_e = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{-1}^1 \rho(\xi) A(\xi) a^2 (V(\xi))^2 a d\xi \quad (6.24)$$

y expresando al corrimiento en términos del vector  $[F(\xi)]$



$$(V(\xi))^2 = \{\delta_e\}' [F(\xi)]' [F(\xi)] \{\delta_e\} \quad (6.25)$$

donde  $[F(\xi)]'$  es el traspuesto del vector  $[F(\xi)]$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \omega^2 a^3 \int_{-1}^1 \rho(\xi) A(\xi) \{\delta_e\}' [F(\xi)]' [F(\xi)] \{\delta_e\} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 a^3 \{\delta_e\}' \int_{-1}^1 \rho(\xi) A(\xi) [F(\xi)]' [F(\xi)] d\xi \{\delta_e\} \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \{\delta_e\}' [m_e] \{\delta_e\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

con

$$[m_e] = a^3 \int_{-1}^1 \rho(\xi) A(\xi) [F(\xi)]' [F(\xi)] d\xi. \quad (6.27)$$

Al ensamblar las matrices de rigidez  $[k_e]$  y de masa  $[m_e]$  de los elementos para todo el dominio de la viga, se obtienen las matrices de rigidez  $\mathbf{K}$  y de masa  $\mathbf{M}$  globales, respectivamente. Con ellas, se construye la ecuación matricial del movimiento:

$$\{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} \{\delta_e\} = \{0\}. \quad (6.28)$$

Finalmente, los valores de las frecuencias naturales se obtienen de igual a cero el determinante de la Ec. (6.28), es decir, de resolver la ecuación característica:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0. \quad (6.29)$$

Al considerar una viga AFG de sección variable, las matrices elementales de rigidez (Ec. (6.22)) y de masa (Ec. (6.27)) cambian, elemento a elemento, debido a que las propiedades del material y las características geométricas poseen una ley de variación que depende de la coordenada  $x$ . El proceso de ensamblado es idéntico al de una viga de sección constante y de material uniforme.

Para considerar las distintas condiciones de borde clásicas, el método sólo anula las condiciones esenciales (desplazamiento y giro) conocidas, según corresponda a cada condición de vínculo. Basta, entonces, con eliminar las filas y columnas correspondientes, en las matrices resultantes de rigidez y de masa globales.

El mallado a utilizar, para el análisis, queda a libre elección del programador. Particularmente, para esta tesis se elige discretizar a la viga en elementos de igual longitud, es decir, se adopta un mallado regular. De esta manera la semi-longitud  $a$  de cada elemento viene dada por:

$$a = \frac{L}{2n_e}, \quad (6.30)$$

donde  $n_e$  es el número de elementos en que se divide la viga.

## 6.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se analizan para el modelo de la [Figura 6.1](#), casos particulares de comparación y propuestos. Parte de los resultados aquí presentados, se pueden encontrar en el trabajo de [Gilardi et al. \(2016\)](#).

### 6.3.1 Casos de comparación

#### 6.3.1.1 Viga cantiléver sin masa

Al igual que para GDQM, se emplea para el estudio de convergencia de FEM, el caso de la vibración transversal libre de una viga Bernoulli-Euler en voladizo de sección transversal constante y de material homogéneo, cuyos valores de los coeficientes de frecuencia exactos se tomaron del libro [Karnovsky y Lebed, 2001](#).

En las [Tabla 6.1](#) y [6.2](#), se presentan el estudio de convergencia para los elementos viga EB2N y EB3N, respectivamente, contrastado con la solución exacta del problema. En ambos casos se comparan los primeros 5 coeficientes de frecuencia y se indican el número de elementos  $n_e$ , la cantidad total de nodos y de grados de libertad (GL) de cada modelo resuelto.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$n_e$	Nodos	GL
3.53273	34.8069	—	—	—	1	2	4
3.51772	22.2215	75.1571	218.138	—	2	3	6
3.51637	22.1069	62.4660	140.671	264.743	3	4	8
3.51613	22.0602	62.1749	122.658	228.137	4	5	10
3.51606	22.0455	61.9188	122.320	203.020	5	6	12
3.51604	22.0399	61.8101	121.681	202.863	6	7	14
3.51603	22.0375	61.7600	121.348	201.713	7	8	16
3.51602	22.0345	61.6982	120.909	199.893	20	21	42
3.51602	22.0345	61.6974	120.903	199.866	30	31	62
3.51602	22.0345	61.6973	120.903	199.863	35	36	72
3.51602	22.0345	61.6973	120.902	199.862	40	41	82
3.51602	22.0345	61.6973	120.902	199.861	45	46	92
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860	50	51	102
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860	<a href="#">Karnovsky y Lebed, 2001</a>		

Tabla 6.1: Análisis de convergencia para elemento EB2N, empleando una viga cantiléver homogénea de sección constante y sin masa ( $M = 0$ ).

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$n_e$	Nodos	GL
3.51602	22.1578	63.3466	281.596	—	1	3	6
3.51602	22.0346	61.7810	122.586	203.861	2	5	10
3.51602	22.0345	61.6982	120.998	200.637	3	7	14
3.51602	22.0345	61.6974	120.905	199.980	4	9	18
3.51602	22.0345	61.6973	120.903	199.865	5	11	22
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.862	6	13	26
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860	7	15	30
3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860	Karnovsky y Lebed, 2001		

Tabla 6.2: Análisis de convergencia para elemento EB3N, empleando una viga cantiléver homogénea de sección constante y sin masa ( $M = 0$ ).

En la [Tabla 6.1](#), se aprecia que el elemento EB2N requiere  $n_e = 50$  elementos para que la solución converja, mientras que la [Tabla 6.2](#) evidencia que EB3N solo demanda  $n_e = 7$  elementos, para la misma situación. Es notable que con tan pocos nodos se pueda hallar una excelente solución al problema. Esto se debe fundamentalmente a que el modelo es bastante simple. En la medida que el modelo se complejice, es decir, se deban considerar para el análisis de comportamiento dinámico de vigas, la variación de las propiedades del material y de las características geométricas, será necesario aumentar el número de elementos para aproximar la solución, en ambos casos.

### 3.1.2 Viga cantiléver AFG ahusada sin masa

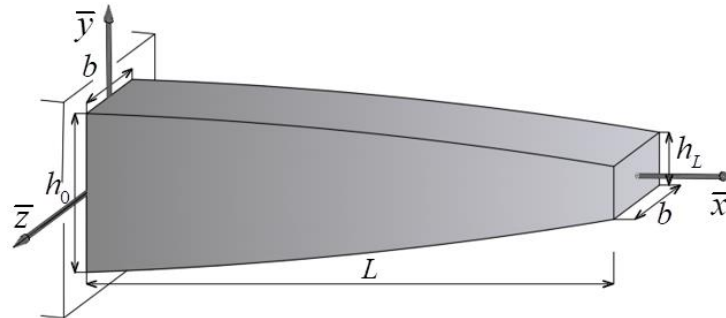


Figura 6.4: Viga cantiléver AFG ahusada sin masa adosada.

A continuación, se resuelve con FEM el modelo de viga AFG en voladizo ahusada y sin masa ( $M = 0$ ), estudiada por medio de los métodos de Rayleigh-Ritz y GDQM, en el capítulo 4 ([Tabla 4.5](#)). La viga presenta: ancho constante  $b = b_0$  y altura  $h$  que puede variar de manera lineal y/o cuadrática ([Figura 6.4](#)). De acuerdo a la ley de distribución axial asimétrica establecida en la Ec. (2.12)), entonces:

$$h(x) = h_0 \left( 1 + \left( h_L / h_0 - 1 \right) x^n \right) \text{ con } n = 1 \text{ y } n = 2 \text{ para } x \in [0, 1] . \quad (6.31)$$

En cuanto a las propiedades del material AFG, se emplea la composición b) Alum-Ac con distribución cuadrática (con  $n = 2$  en la Ec. (2.12)).

$$E(x) = E_{\text{Alum}} \left( 1 + \left( E_{\text{Ac}} / E_{\text{Alum}} - 1 \right) x^n \right); \rho(x) = \rho_{\text{Alum}} \left( 1 + \left( \rho_{\text{Ac}} / \rho_{\text{Alum}} - 1 \right) x^n \right) \text{ para } n = 2 \text{ y } x \in [0,1]. \quad (6.32)$$

En la [Tabla 6.3](#) se encuentran los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos para los dos elementos presentados y contrastados con los métodos aproximados citados.

$n$	1					2					Sol.
$\frac{h_L}{h_0}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
0.8	5.26578	31.2825	85.2699	165.696	272.865	5.42919	32.5330	88.4712	171.828	282.910	EB2N
	5.26579	31.2824	85.2699	165.696	272.865	5.42919	32.5330	88.4711	171.828	282.910	EB3N
	5.26578	31.2825	85.2699	165.696	272.865	5.42919	32.5331	88.4712	171.828	282.910	R-Ritz
	5.26578	31.2825	85.2699	165.696	272.865	5.42919	32.5331	88.4712	171.828	282.910	GDQM
0.6	5.43948	28.7201	75.7163	145.740	239.030	5.79885	31.3298	82.2379	158.085	259.131	EB2N
	5.43949	28.7201	75.7162	145.740	239.030	5.79887	31.3297	82.2380	158.085	259.131	EB3N
	5.43948	28.7201	75.7164	145.740	239.030	5.79886	31.3298	82.2380	158.085	259.131	R-Ritz
	5.43948	28.7201	75.7164	145.740	239.030	5.79886	31.3298	82.2380	158.085	259.131	GDQM
0.4	5.70845	25.9275	65.3456	123.987	202.062	6.30429	30.1054	75.4273	142.748	232.329	EB2N
	5.70844	25.9276	65.3456	123.987	202.062	6.30428	30.1055	75.4274	142.747	232.329	EB3N
	5.70846	25.9275	65.3456	123.987	202.062	6.30429	30.1054	75.4274	142.748	232.329	R-Ritz
	5.70846	25.9275	65.3456	123.987	202.062	6.30429	30.1054	75.4274	142.748	232.329	GDQM
0.2	6.21081	22.8349	53.5621	98.9631	159.266	7.06695	29.0915	67.8700	124.799	200.247	EB2N
	6.21083	22.8348	53.5619	98.9627	159.265	7.06696	29.0914	67.8700	124.799	200.247	EB3N
	6.21082	22.8349	53.5622	98.9632	159.266	7.06696	29.0915	67.8702	124.799	200.248	R-Ritz
	6.21082	22.8349	53.5622	98.9633	159.266	7.06696	29.0915	67.8702	124.799	200.248	GDQM

Tabla 6.3: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac), propiedades variables con  $n = 2$  (Ec. (6.31)). Sección ahusada, con  $b = b_0$  y  $h$  variando con  $n = 1$  y  $n = 2$  (Ec. (6.31)). Sin masa ( $M = 0$ ).

Los resultados obtenidos brindan muy buena concordancia con el método de Rayleigh-Ritz y GDQM. Dada la complejidad del modelo (considerar sección ahusada y propiedades del material AFG variando con cuadráticamente (con  $n = 2$  en la Ec. (2.12)) en FEM se deben emplear:  $n_e = 650$  elementos EB2N y  $n_e = 450$  elementos EB3N, para obtener la misma precisión en la solución.

### 6.3.2 Casos propuestos

Los casos de vigas AFG que se analizan a continuación no han sido tratados en los capítulos previos, por lo que los resultados se obtienen simultáneamente para los 3 métodos aproximados presentados en la tesis.

El material AFG a emplear es el propuesto por [Su et al., 2013](#), cuyas propiedades están especificadas en la [Tabla 2.4](#). Para todos los casos propuestos, se considera como patrón de

referencia a la viga de sección constante y constituida por acero. Por lo cual, los coeficientes de frecuencia estarán en referencia a esta viga (Ec. (2.25)); y, además, se contempla el coeficiente de peso de viga  $W_b$ , definido en la Ec. (3.7).

Para el próximo estudio se considera que el material y la geometría puedan variar mediante dos leyes diferentes. La distribución de estas leyes se ejemplifica por medio de 2 materiales arbitrarios.

❖ **Ley de variación axial asimétrica:**

$$R(x) = R_0 + (R_L - R_0)x^n \quad \text{con } n \geq 0 \quad \text{y } x \in [0,1]. \quad (6.33)$$

Por ejemplo, sean "a" y "b" los materiales que componen a la viga, en  $x=0$  la sección transversal está totalmente constituida por el material "a",  $R_0 = R_a$ ; mientras que en  $x=1$ , lo está por el material "b",  $R_L = R_b$ . La ley descrita en la Ec. (6.33) es análoga a la Ec. (2.12). En particular, para el material AFG a emplear, la distribución de las propiedades se pueden visualizar en la Figura 2.5, para las composiciones (a) Ac-Alum y b) Alum-Ac.

❖ **Ley de variación axial simétrica:**

$$R(x) = R_0 + 4(R_{L/2} - R_0)(x - x^2) \quad \text{con } x \in [0,1]. \quad (6.34)$$

En este caso, en  $x=0$  y  $x=1$ , el material "a" es quien constituye totalmente a la sección transversal; mientras que en  $x=0.5$  la sección está constituida por el material "b".

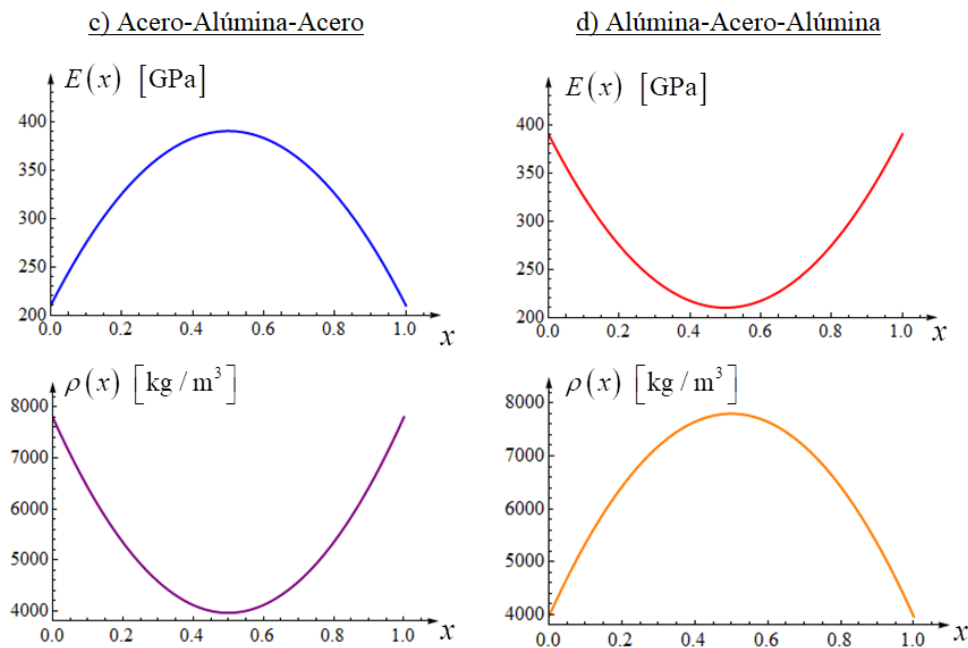


Figura 6.5: Distribución de las propiedades del material AFG (composiciones c) y d)) a lo largo de la viga, con ley de variación axial simétrica (Ec. (6.34)).

Para el material AFG a emplear, la distribución de las propiedades simétricas se representan en la [Figura 6.5](#) para las composiciones: c) Ac-Alum-Ac y d) Alum-Ac-Alum.

### 6.3.2.1 Viga AFG Empotrada-Apoyada (E-A)

Las condiciones de borde para la viga empotrada-apoyada son: en  $x=0$ , desplazamiento y giro de la sección nulos  $V(0)=0$  y  $\theta(0)=V'(0)=0$ ; en  $x=1$ , desplazamiento nulo  $V(1)=0$ . En FEM, que contempla las condiciones de borde esenciales conocidas, se eliminan las filas y columnas: primera, segunda y anteúltima de las matrices de rigidez y masa globales; según corresponde a este caso.

Para GDQM, las condiciones de borde análogas son (ver Anexo 1):

$$V_i \Big|_{i=1} = 0, \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^{(1)} V_j \Big|_{i=1} = 0 \quad ; \quad V_i \Big|_{i=N} = 0, \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^{(2)} V_j \Big|_{i=N} = 0, \quad (6.35)$$

pues se considera, además, la condición de borde natural de momento flector nulo en  $x=1$ .

En el método de Rayleigh-Ritz, se debe elegir una función coordenada que satisfaga, al menos, las condiciones de borde esenciales, para este caso  $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi(1)=0$  (Ec. (2.4)).

Si, además, se impone que la función cumpla con la condición natural,  $\varphi''(1)=0$ . Se llega a:

$$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{N_p} = \{(2x^2 - 5x + 3)x^{j+1}\}_{j=1}^{N_p} \quad (6.36)$$

El procedimiento para llegar al polinomio de la Ec. (6.36) es muy sencillo. Se plantea la función aproximante como un polinomio completo de cuarto grado, y luego se determinan los coeficientes homogéneos, haciendo que cumpla con las condiciones de borde establecidas. Como son 5 incógnitas y 4 ecuaciones, el sistema debe reducirse hasta encontrar los coeficientes no nulos. Luego, se le asigna un valor, no nulo, a uno de los coeficientes y se despejan los restantes.

Se estudian dos casos de vigas de sección constante, ancho  $b=b_0$  y altura  $h=h_0$ , con propiedades del material AFG variando según las leyes dadas en las Ecs. (6.33) y (6.34):

- ✓ CASO A: Ley asimétrica, composición: a) Ac-Alum y b) Alum-Ac, ([Figura 2.5](#)).
- ✓ CASO B: Ley simétrica, composición: c) Ac-Alum-Ac y d) Alum-Ac-Alum, ([Figura 6.5](#)).

Los primeros 5 coeficientes de frecuencia, para cada caso, se muestran en las [Tablas 6.4 y 6.5](#), respectivamente. En ambas tablas, se observa que los valores calculados por los 3 métodos tienen muy buena concordancia entre sí. Para los métodos de Rayleigh-Ritz y GDQM, en ambos casos, los valores convergen para  $N_p = 20$  términos de polinomios y  $N = 43$  nodos,

respectivamente. Para FEM, en cambio, las cantidades de elementos son variables. La convergencia se logra de aplicar: en la ley asimétrica  $n_e = 1600$  para EB2N y  $n_e = 500$  para EB3N; y en la ley simétrica  $n_e = 600$  para EB2N y  $n_e = 350$  para EB3N.

CASO A											
$n$	a) Ac-Alum					b) Alum-Ac					Sol.
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
0.5	23.5504	76.1717	158.909	271.751	414.694	18.9174	61.3304	128.098	219.208	334.657	EB2N
	23.5502	76.1716	158.911	271.752	414.695	18.9174	61.3303	128.098	219.208	334.656	EB3N
	23.5503	76.1715	158.911	271.753	414.696	18.9174	61.3303	128.098	219.208	334.656	R-Ritz
	23.5503	76.1715	158.911	271.753	414.696	18.9173	61.3303	128.098	219.207	334.655	GDQM
$n$	a) Ac-Alum					b) Alum-Ac					Sol.
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
1.0	20.9379	68.0893	142.275	243.450	371.612	20.9028	68.0117	142.168	243.326	371.476	EB2N
	20.9379	68.0893	142.275	243.450	371.612	20.9028	68.0117	142.168	243.326	371.476	EB3N
	20.9379	68.0893	142.275	243.450	371.612	20.9028	68.0117	142.168	243.326	371.476	R-Ritz
	20.9379	68.0893	142.275	243.450	371.612	20.9028	68.0117	142.168	243.326	371.476	GDQM
$n$	a) Ac-Alum					b) Alum-Ac					Sol.
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
2.0	18.5267	60.9006	127.561	218.473	333.634	23.5626	76.2409	158.888	271.530	414.186	EB2N
	18.5267	60.9006	127.561	218.473	333.634	23.5625	76.2409	158.888	271.530	414.186	EB3N
	18.5267	60.9005	127.561	218.473	333.634	23.5626	76.2409	158.888	271.530	414.186	R-Ritz
	18.5267	60.9005	127.561	218.473	333.634	23.5626	76.2409	158.888	271.530	414.186	GDQM

Tabla 6.4: Coeficientes de frecuencia para la viga Empotrada-Apoyada de material AFG (Ec. (6.33) con  $n = 0.5$ ,  $n = 1$  y  $n = 2$ ), sección constante (ancho  $b = b_0$  y altura  $h = h_0$ ) y sin masa ( $M = 0$ ).

CASO B										
c) Ac-Alum-Ac					d) Alum-Ac-Alum					Solución
$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
25.2453	77.5621	160.062	272.557	415.124	17.9158	59.9341	126.249	216.904	331.872	EB2N
25.2453	77.5621	160.062	272.557	415.124	17.9158	59.9340	126.249	216.904	331.872	EB3N
25.2453	77.5621	160.062	272.557	415.124	17.9158	59.9340	126.249	216.904	331.871	M.R-Ritz
25.2453	77.5621	160.062	272.557	415.124	17.9158	59.9340	126.249	216.904	331.871	GDQM

Tabla 6.5: Coeficientes de frecuencia para la viga Empotrada-Apoyada de material AFG (Ec. (6.34)), sección constante (ancho  $b = b_0$  y altura  $h = h_0$ ) y sin masa ( $M = 0$ ).

Luego, para tener una idea de la rigidización dinámica se logra, es que se calculan los respectivos coeficientes de frecuencia para cuando la viga es de sección constante y está constituida por un material homogéneo ( $W_{b(Ac)} = 1$ ).

En la [Tabla 6.6](#), se exponen los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos, junto con los valores exactos que brinda libro de [Karnovsky y Lebed, 2001](#).

$W_{b(Ac)}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1	15.4182	49.9649	104.248	178.270	272.031	EB2N
	15.4182	49.9649	104.248	178.270	272.031	EB3N
	15.4182	49.9649	104.248	178.270	272.031	M.R-Ritz
	15.4182	49.9649	104.248	178.270	272.031	GDQM
	15.4182	49.9649	104.248	178.270	272.031	<a href="#">Karnovsky-Lebed, 2001</a>

Tabla 6.6: Coeficientes de frecuencia para la viga Empotrada-Apoyada de material homogéneo, sección constante (ancho  $b = b_0$  y altura  $h = h_0$ ) y sin masa ( $M = 0$ ).

La convergencia obtenida es excelente para los 3 métodos empleados. La precisión en los resultados resulta de implementar  $N_p = 20$  términos de polinomios en M.R-Ritz,  $N = 23$  nodos en GDQM,  $n_e = 70$  elementos EB2N y  $n_e = 10$  elementos EB3N.

La [Tabla 6.7](#), presenta los porcentajes de rigidización de los coeficientes de frecuencia  $\Omega_{i(\%)}$  y de reducción de peso  $W_{(\%)}$ , que se obtienen de comparar las [Tablas 6.5](#) y [6.6](#). Sea:

$$\Omega_{i(\%)} = \frac{\Omega_{i(AFG)} - \Omega_{i(Ac)}}{\Omega_{i(Ac)}} \times 100 \quad ; \quad W_{(\%)} = (W_{b(Ac)} - W_{b(AFG)}) \times 100 \quad (6.37)$$

CASO A												
$n$	a) Ac-Alum						b) Alum-Ac					
	$W_{(\%)}$	$\Omega_{1(\%)}$	$\Omega_{2(\%)}$	$\Omega_{3(\%)}$	$\Omega_{4(\%)}$	$\Omega_{5(\%)}$	$W_{(\%)}$	$\Omega_{1(\%)}$	$\Omega_{2(\%)}$	$\Omega_{3(\%)}$	$\Omega_{4(\%)}$	$\Omega_{5(\%)}$
0.5	32.80	52.74	52.45	52.44	52.44	52.44	16.40	22.69	22.75	22.88	22.96	23.02
1.0	24.60	35.80	36.27	36.48	36.56	36.61	24.60	35.57	36.12	36.38	36.49	36.56
2.0	16.40	20.16	21.89	22.36	22.55	22.65	32.80	52.82	52.59	52.41	52.31	52.26
CASO B												
	c) Ac-Alum-Ac						d) Alum-Ac-Alum					
	$W_{(\%)}$	$\Omega_{1(\%)}$	$\Omega_{2(\%)}$	$\Omega_{3(\%)}$	$\Omega_{4(\%)}$	$\Omega_{5(\%)}$	$W_{(\%)}$	$\Omega_{1(\%)}$	$\Omega_{2(\%)}$	$\Omega_{3(\%)}$	$\Omega_{4(\%)}$	$\Omega_{5(\%)}$
	32.80	63.74	55.23	53.54	52.89	52.60	16.40	16.20	19.95	21.10	21.67	22.00

Tabla 7: Porcentaje de rigidización y de reducción en peso de la viga Empotrada-Apoyada de material AFG, sección constante (ancho  $b = b_0$  y altura  $h = h_0$ ) y sin masa ( $M = 0$ ).

En la ley asimétrica (Ec. (6.33)), se observa que la mayor rigidización de la viga se produce para la composición a) Ac-Alum cuando  $n = 0.5$  y en la composición b) Alum-Ac cuando  $n = 2$ . En ambos casos, se logra rigidizar más al coeficiente fundamental y paralelamente se genera la mayor reducción del peso de la viga. Cuando la variación de las propiedades es lineal ( $n = 1$ ), los resultados son muy similares, aunque se nota una leve pero mayor rigidización en la composición a) para el mismo peso.

Por otra parte, la ley simétrica (Ec. (6.34)) junto con la composición c) Ac-Alum-Ac brindan la mayor rigidización obtenida y la misma reducción en peso que las composiciones a) con



$n=0.5$  y b) con  $n=2$  (Ec. (6.33)). La composición d) Alum-Ac-Alum es la que logra la peor rigidización de las analizadas.

### 6.3.2.2 Viga AFG Simplemente Apoyada (A-A)

La viga simplemente apoyada tiene en ambos extremos el desplazamiento vertical impedido, por lo tanto  $V(x)=0$ , en las coordenadas  $x=0$  y  $x=1$ . Entonces en FEM, se eliminan las filas y columnas: primera y anteúltima de las matrices de rigidez y masa globales, que corresponden a las condiciones de borde esenciales.

Para GDQM, las condiciones de borde análogas son (ver Anexo 1):

$$V_i|_{i=1} = 0, \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^{(2)} V_j \Big|_{i=1} = 0 \quad ; \quad V_i|_{i=N} = 0, \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^{(2)} V_j \Big|_{i=N} = 0 \quad (6.38)$$

debido a que considera, además, las condiciones de borde naturales: momento flector nulo en ambos extremos. Y para el método de Rayleigh-Ritz, las funciones coordenadas son:

$$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{N_p} = \{(x-1)x^j\}_{j=1}^{N_p} \quad (6.39)$$

las cuales cumplen con las condiciones de borde esenciales del problema  $\varphi(0)=\varphi(1)=0$  y como se observará, funcionan muy bien. Pero, también se pueden adoptar funciones de la forma:

$$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{N_p} = \{(x^3 - 2x^2 + 1)x^j\}_{j=1}^{N_p} \quad (6.40)$$

que cumplen, además, con las condiciones de borde naturales  $\varphi''(0)=\varphi''(1)=0$ . El polinomio de la Ec. (6.40) se deduce de igual manera que el polinomio de la Ec. (6.36).

Seguidamente, se estudian 3 vigas AFG simplemente apoyadas de ancho constante  $b=b_0$ , con altura  $h$  y propiedades del material AFG variando mediante la ley simétrica definida en la Ec. (6.34). Se elige la composición c) Ac-Alum-Ac (Figura 6.5) para el estudio, debido a que desde el punto de vista de la rigidización dinámica, Figura 2.4, resulta ser más favorable colocar el material más rígido y liviano (de la composición, alúmina) en el tramo central.

Los primeros 5 coeficientes de frecuencia se muestran en la Tablas 6.8. Se distingue que los 3 métodos tienen muy buena concordancia en los resultados. Los valores convergen para  $N_p = 25$  términos de polinomios en el método de Rayleigh-Ritz,  $N = 43$  nodos para GDQM; y en FEM,  $n_e = 900$  elementos para EB2N y  $n_e = 450$  elementos para EB3N.

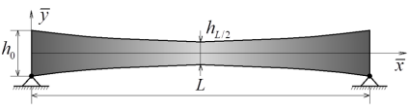
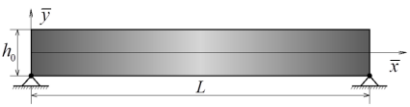
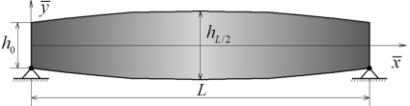
$\frac{h_{L/2}}{h_0}$	Esquema	$W_{b(AFG)}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Sol.
0.5		0.470	9.40742	38.6432	89.6359	159.279	248.376	EB2N
			9.40741	38.6432	89.6357	159.278	248.375	EB3N
			9.40742	38.6432	89.6359	159.279	248.376	R-Ritz
			9.40742	38.6432	89.6359	159.279	248.375	GDQM
1.0		0.672	17.1553	61.7453	136.973	242.062	377.197	EB2N
			17.1552	61.7453	136.974	242.062	377.196	EB3N
			17.1554	61.7453	136.974	242.063	377.197	R-Ritz
			17.1554	61.7453	136.974	242.063	377.197	GDQM
1.5		0.874	24.1882	81.5782	180.127	317.536	494.054	EB2N
			24.1881	81.5780	180.127	317.535	494.052	EB3N
			24.1882	81.5781	180.127	317.536	494.054	R-Ritz
			24.1882	81.5781	180.127	317.536	494.054	GDQM

Tabla 6.8: Coeficientes de frecuencia para la viga simplemente apoyada de material AFG (Ec. (6.34)), sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y de altura  $h$  variable (Ec. (6.34)), y sin masa ( $M = 0$ ).

Seguidamente, se determinan los coeficientes de frecuencia para vigas constituidas por material homogéneo, para evaluar la rigidización que se logra mediante materiales AFG.

En la [Tabla 6.9](#) se exponen, para la viga homogénea de ancho constante  $b = b_0$ , los primeros 5 coeficientes de frecuencia para 3 relaciones de altura ( $h_{L/2} / h_0$ ). En particular, para el caso de la viga de altura  $h$  constante, los coeficientes de frecuencia obtenidos son contrastados con los valores exactos que brinda el libro de [Karnovsky y Lebed, 2001](#).

$\frac{h_{L/2}}{h_0}$	$W_{b(Ac)}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
0.5	0.667	5.36845	24.1562	56.5592	101.366	158.751	EB2N
		5.36845	24.1563	56.5593	101.365	158.751	EB3N
		5.36844	24.1563	56.5594	101.366	158.779	M.R-Ritz
		5.36844	24.1563	56.5593	101.366	158.752	GDQM
1.0	1.000	9.86960	39.4784	88.8264	157.914	246.740	EB2N
		9.86960	39.4784	88.8264	157.914	246.740	EB3N
		9.86960	39.4784	88.8264	157.914	246.740	M.R-Ritz
		9.86960	39.4784	88.8264	157.914	246.740	GDQM
		9.86960	39.4784	88.8264	157.914	246.740	<a href="#">Karnovsky-Lebed, 2001</a>
1.5	1.333	14.0251	52.9393	118.406	209.826	327.232	EB2N
		14.0251	52.9393	118.406	209.826	327.232	EB3N
		14.0251	52.9392	118.406	209.826	327.233	M.R-Ritz
		14.0251	52.9392	118.406	209.826	327.233	GDQM

Tabla 6.9: Coeficientes de frecuencia para la viga simplemente apoyada de material homogéneo, sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h$  variable (Ec. (6.34)), y sin masa ( $M = 0$ ).

Los resultados evidencian una excelente concordancia entre los 3 métodos y con la solución exacta (para el caso de la viga uniforme homogénea). En el método de Rayleigh-Ritz se utilizan

$N_p = 20$  términos de polinomios, en GDQM  $N = 43$  nodos y en FEM,  $n_e = 1000$  y  $n_e = 670$  elementos para EB2N y EB3N, respectivamente; con la finalidad de lograr la misma precisión entre los 3 métodos, para los casos analizados.

Los porcentajes de rigidización de los coeficientes de frecuencia  $\Omega_{i(\%)}$  y de reducción de peso  $W_{(\%)}$  para la viga simplemente apoyada, se muestran en la [Tabla 6.10](#).

$\frac{h_{L/2}}{h_0}$	$W_{(\%)}$	$\Omega_{1(\%)}$	$\Omega_{2(\%)}$	$\Omega_{3(\%)}$	$\Omega_{4(\%)}$	$\Omega_{5(\%)}$
0.5	19.69	75.24	59.97	58.48	57.13	56.45
1.0	32.82	73.82	56.40	54.20	53.29	52.87
1.5	45.95	72.46	54.10	52.13	51.33	50.98

Tabla 6.10: Porcentajes de rigidización y de reducción en peso al emplear material AFG en la viga simplemente apoyada, de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h$  variable (Ec. (6.34)), y sin masa ( $M = 0$ ).

De la [Tabla 6.10](#), se observa que la mayor rigidización se obtiene para la relación  $h_{L/2} / h_0 = 0.5$ , mientras que la mayor reducción en peso es para  $h_{L/2} / h_0 = 1.5$ . Al igual que en el Caso B estudiado anteriormente, el coeficiente de frecuencia fundamental obtiene una mayor rigidización, respecto de los demás coeficientes, para la composición c) Ac-Alum-Ac.

### 6.3.2.3 Viga AFG Biempotrada (E-E)

La viga doblemente empotrada posee cuatro condiciones de borde esenciales, es decir, tanto el desplazamiento como el giro de la sección se encuentran impedidos en ambos extremos. Por lo tanto, debe cumplirse:  $V(x) = 0$  y  $\theta(x) = V'(x) = 0$ , en las coordenadas  $x = 0$  y  $x = 1$ .

Luego, para contemplarlas en FEM, se deben eliminar las filas y columnas: primera, segunda, anteúltima y última, de las matrices de rigidez y masa globales. En GDQM, las condiciones de borde análogas son (ver Anexo 1):

$$V_i \Big|_{i=1} = 0, \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^{(1)} V_j \Big|_{i=1} = 0 \quad ; \quad V_i \Big|_{i=N} = 0, \quad \sum_{j=1}^N B_{ij}^{(1)} V_j \Big|_{i=N} = 0 \quad (6.41)$$

Y para el método de Rayleigh-Ritz, la función coordenada a utilizar es:

$$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{N_p} = \{(x-1)^2 x^{j+1}\}_{j=1}^{N_p} \quad (6.42)$$

que cumple con las 4 condiciones de borde esenciales  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0$ .

Seguidamente, se estudian las vigas AFG presentadas para la vinculación simplemente apoyadas, pero ahora considerándolas doblemente empotradas. En la [Tabla 6.11](#), se exponen

los primeros 5 coeficientes de frecuencia calculados para la viga AFG biempotrada.

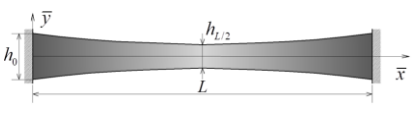
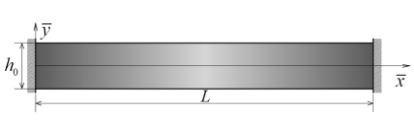
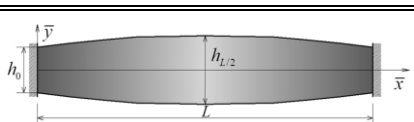
$\frac{h_{L/2}}{h_0}$	Esquema	$W_{b(\text{AFG})}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Sol.
0.5		0.470	29.9085	70.2236	129.921	209.039	307.776	EB2N
			29.9086	70.2235	129.921	209.039	307.776	EB3N
			29.9085	70.2236	129.921	209.040	307.778	R-Ritz
			29.9085	70.2236	129.921	209.040	307.776	GDQM
1		0.672	35.6800	95.1011	184.971	304.885	454.899	EB2N
			35.6799	95.1011	184.972	304.886	454.899	EB3N
			35.6800	95.1011	184.971	304.885	454.898	R-Ritz
			35.6800	95.1011	184.971	304.885	454.898	GDQM
1.5		0.874	41.7686	116.783	233.613	389.901	585.546	EB2N
			41.7688	116.783	233.613	389.901	585.546	EB3N
			41.7686	116.783	233.612	389.900	585.545	R-Ritz
			41.7686	116.783	233.612	389.900	585.545	GDQM

Tabla 6.11: Coeficientes de frecuencia para la viga biempotrada de material AFG (Ec. (6.34)), sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y de altura  $h$  variable (Ec. (6.34)), y sin masa ( $M = 0$ ).

Los resultados comparativamente son muy buenos entre los 3 métodos. Nuevamente, para los métodos de Rayleigh-Ritz y GDQM, los valores convergen para  $N_p = 25$  términos de polinomios y  $N = 43$  nodos, respectivamente; y para FEM se requieren emplear  $n_e = 850$  elementos EB2N y  $n_e = 500$  elementos EB3N, para lograr la misma precisión.

Para probar la rigidización que se obtiene de emplear materiales AFG en las vigas, es necesario determinar (para las mismas geometrías) los primeros 5 coeficientes de frecuencia para vigas constituidas por material homogéneo.

$\frac{h_{L/2}}{h_0}$	$W_{b(\text{Ac})}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
0.5	0.667	18.7465	45.1070	83.7204	134.837	198.557	EB2N
		18.7465	45.1070	83.7203	134.837	198.557	EB3N
		18.7465	45.1071	83.7203	134.836	198.577	M.R-Ritz
		18.7465	45.1071	83.7203	134.837	198.557	GDQM
1.0	1.000	22.3733	61.7061	120.903	199.859	298.556	EB2N
		22.3733	61.7061	120.903	199.859	298.556	EB3N
		22.3733	61.7061	120.903	199.859	298.556	M.R-Ritz
		22.3733	61.7061	120.903	199.859	298.556	GDQM
1.5	1.333	25.9816	76.2566	153.952	257.903	388.009	EB2N
		25.9817	76.2564	153.953	257.904	388.009	EB3N
		25.9818	76.2565	153.952	257.904	388.010	M.R-Ritz
		25.9818	76.2565	153.952	257.904	388.010	GDQM

Tabla 6.12: Coeficientes de frecuencia para la viga biempotrada de material homogéneo, sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h$  variable (Ec. (6.34)), y sin masa ( $M = 0$ ).

En la [Tabla 6.12](#), se exponen los resultados para la viga homogénea de ancho constante

$b = b_0$  y para 3 relaciones de altura ( $h_{L/2} / h_0$ ). Nuevamente, para el caso de la viga de altura constante, los coeficientes de frecuencia obtenidos se comparan con los valores exactos que brindan [Karnovsky y Lebed, 2001](#).

Los resultados evidencian una excelente concordancia entre los métodos estudiados. En el método de Rayleigh-Ritz se utilizan  $N_p = 25$  términos de polinomios, en GDQM  $N = 43$  nodos y en FEM  $n_e = 1500$  y  $n_e = 930$  elementos para EB2N y EB3N, respectivamente; para demostrar que se logra la misma convergencia en los 3 casos.

Los porcentajes de rigidización de los coeficientes de frecuencia  $\Omega_{i(\%)}$  y de reducción de peso  $W_{(\%)}$ , Ec. (6.37), para la viga biempotrada se presentan en la [Tabla 6.13](#).

$\frac{h_{L/2}}{h_0}$	$W_{(\%)}$	$\Omega_{1(\%)}$	$\Omega_{2(\%)}$	$\Omega_{3(\%)}$	$\Omega_{4(\%)}$	$\Omega_{5(\%)}$
0.5	19.69	59.54	55.68	55.18	55.03	55.01
1.0	32.82	59.48	54.12	52.99	52.55	52.37
1.5	45.95	60.76	53.14	51.74	51.18	50.91

Tabla 6.13: Porcentajes de rigidización y de reducción en peso al emplear material AFG en la viga biempotrada, de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h$  variable (Ec. (6.34)), y sin masa ( $M = 0$ ).

Para la viga biempotrada, al igual que en la viga simplemente apoyada, la mayor rigidización se obtiene para la relación  $h_{L/2} / h_0 = 0.5$  y la mayor reducción en peso es para  $h_{L/2} / h_0 = 1.5$ ; con la excepción de que el coeficiente de frecuencia fundamental se eleva porcentualmente más para la relación  $h_{L/2} / h_0 = 1.5$  en esta vinculación (E-E).

## 6.4 REFERENCIAS

- Argyris, J.H. y Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalised Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations*. London Butterworth, 1960. Part I reprinted from Aircraft Engineering, 26, 1954; 27, 1955.
- Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- Clough R.W., The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *Proceedings of American Society of Civil Engineers*, 23: 345-37, 1960.
- Cook, R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1981.
- Courant, R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49:1–61, 1943.
- Davies, A.J., *The Finite Element Method: An Introduction with Partial Differential Equations*

- (*Second Edition*). Oxford University Press, 2011.
- Gilardi, G.J., Díaz Valdez, I.H., Bambill, D.V., Rossit, C.A. y Romero, F., Comportamiento dinámico de vigas constituidas por material funcionalmente graduado. V CAIM, (I-001:11 págs.). Publicado en las Actas del Congreso, 2016.
- Hrenikoff, A., Solution of problems in elasticity by the framework method. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, A8:169–175, 1941.
- Karnovsky, I.A. y Lebed O.I., *Formulas for Structural Dynamics: Tables Graphs and Solutions*. McGraw-Hill, 2001.
- Levy, S., Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuities and Sweepback. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 14:10, 1947.
- Levy, S., Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20:7, 1953.
- McHenry, D., A lattice analogy for the solution of plane stress problems. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 21:59–82, 1943.
- Newmark, N.M., *Numerical methods of analysis in bars, plates and elastic bodies*. In L.E. Grinte (editor), *Numerical Methods in Analysis in Engineering*. Macmillan, 1949.
- Petyt, M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1990.
- Rao, S.S., *The Finite Element Method in Engineering (Fifth Edition)*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2011.
- Reddy, J.N., *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons, 2002.
- Ritz, W., “Theorie der Transversalschwingungen einer quadratische Platte mit freien Rändern”. *Annalen der Physik*, 28: 737–786, 1909.
- Rossi, R.E., *Introducción al Análisis de Vibraciones con el Métodos de Elementos Finitos*. Edi UNS, 2007.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C y Topp L.J., Stiffnes and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23:7805–824,1956.
- Zienkiewickz, O.C., *El método de los elementos finitos*. Reverté S.A., 1980.
- Zienkiewickz, O.C., Taylor, R.L., *El Método de los Elementos Finitos, Formulación básica y problemas lineales*. Mc Graw Hill - CIMNE 4ª Edición, 1994.
- Zienkiewickz, O.C., Taylor, R.L. y Zhu, J.Z., *The Finite Element Method: Its Basis & Fundamentals (Sixth Edition)*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

# **CAPÍTULO 7**

## **EFECTO DE LA TEORÍA DE VIGAS DE TIMOSHENKO SOBRE LAS VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG CANTILÉVER CON MASAS CONCENTRADAS ADOSADAS**

### **MÉTODO DE RAILEYGH-RITZ**

### **TEORÍA DE VIGAS DE TIMOSHENKO**

## 7.1 INTRODUCCIÓN

Una revisión reciente de la literatura demuestra que aparentemente, no hay artículos publicados sobre vigas Timoshenko AFG que soporten masas adosadas. Como se sabe, la teoría de Timoshenko (Timoshenko 1921,1922), proporciona resultados más precisos en el estudio general de vigas, en comparación a las 3 teorías clásicas mencionadas en el capítulo 1. Y su implementación es obligatoria en el caso de altas frecuencias o vigas de baja esbeltez. Comentarios alusivos a lo citado, se pueden encontrar en el trabajo de Elishakoff et al. (2015).

En particular, en este capítulo se presenta una extensión del problema tratado en el capítulo 3 (Figura 3.1), mediante la implementación de la teoría de vigas de Timoshenko.

## 7.2 IMPLEMENTACIÓN ANALÍTICA

### 7.2.1 Procedimiento analítico

De acuerdo con la teoría de vigas de Timoshenko, en la determinación de los coeficientes de frecuencia, se consideran los efectos combinados de la deformación por corte y de la inercia rotacional de la viga.

Cuando la viga vibra según sus modos normales de vibración, el desplazamiento vertical  $v$  de los puntos de la superficie media de la viga en la dirección del eje  $\bar{y}$  y el giro normal de la sección transversal  $\psi$  durante la deformación, pueden escribirse como:

$$v(\bar{x},t) = \bar{V}(\bar{x})\cos(\omega t) \quad ; \quad \psi(\bar{x},t) = \bar{\Psi}(\bar{x})\cos(\omega t) \quad (7.1)$$

donde  $t$  es la variable temporal,  $\omega$  es la frecuencia natural circular de vibración transversal de la viga (en radianes por segundo),  $\bar{V}(\bar{x})$  y  $\bar{\Psi}(\bar{x})$  son las amplitudes del desplazamiento y del giro, respectivamente.

Para el desarrollo de los cálculos, se considera la adimensionalización global de la coordenada espacial  $\bar{x}$  y de las amplitudes, respecto de la longitud  $L$  de la viga.

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad V(x) = \frac{\bar{V}(\bar{x})}{L}, \quad \Psi(x) = \bar{\Psi}(\bar{x}). \quad (7.2)$$

Para aplicar el método de Rayleigh-Ritz, es necesario aproximar las componentes espaciales (amplitudes del desplazamiento y del giro) de la solución como:

$$V(x) \cong V_a(x) = \sum_{i=1}^{N_p} C_i p_i(x) \quad ; \quad \Psi(x) \cong \Psi_a(x) = \sum_{j=1}^{N_q} D_j q_j(x) \quad (7.3)$$

donde  $p_i(x)$  y  $q_j(x)$  son funciones coordenadas que deben satisfacer, al menos, las



condiciones de borde esenciales, multiplicadas por  $C_i$  y  $D_j$  constantes arbitrarias, respectivamente.  $N_p$  y  $N_q$  son el número de términos a sumar, y se adoptan iguales ( $N_p = N_q$ ) para que las matrices resultantes sean cuadradas.

Para el análisis de la viga AFG en voladizo, se eligen las siguientes funciones coordenadas:

$$\{p_i(x)\}_{i=1}^{N_p} = \{x^i\}_{i=1}^{N_p} \quad (7.4)$$

$$\{q_j(x)\}_{j=1}^{N_q} = \{x^j\}_{j=1}^{N_q} \quad (7.5)$$

las cuales satisfacen las condiciones de borde esenciales:  $v(x,t)|_{x=0} = \psi(x,t)|_{x=0} = 0$ . Para el caso en que la viga no lleva masa adosada ( $M=0$ ) en el extremo libre ( $x_m=1$ ), es aconsejable comenzar la suma desde  $j=2$  en la Ec. (7.5); esto permite satisfacer parcialmente las condiciones de bordes naturales del borde y acelerar la convergencia del método.

Luego, el funcional de energía  $J$  para el problema de vibraciones en vigas, puede expresarse en función de la energía máxima de deformación  $U_{máx}$  y de la energía cinética máxima  $T_{máx}$  de la viga (Ec. (2.6)), como:

$$J = U_{máx} - T_{máx} \quad (7.6)$$

Para la viga Timoshenko, la energía de deformación  $U_{máx}$ , independizada de la variable temporal  $t$  y adimensionalizada respecto de la longitud  $L$  de la viga, se puede escribir como:

$$U_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{E(x)I(x)}{L^2} \left( \frac{d^2 \Psi_a(x)}{dx^2} \right)^2 + \kappa G(x)A(x) \left( \frac{dV_a(x)}{dx} - \Psi_a(x) \right)^2 \right] L dx \quad (7.7)$$

donde  $\kappa$  es el factor de corrección por corte y  $G(x)$  es el módulo de corte, que de acuerdo con las leyes de variación descriptas en las Ecs. (2.13), también adopta la forma:

$$G(x) = G_0 f_G(x). \quad (7.8)$$

Se considera que el material es isótropo, por lo cual, el módulo de corte puede relacionarse con el módulo de Young por medio de la siguiente expresión (Kang y Zhong-Ci, 1996):

$$G(x) = \frac{E(x)}{2(1+\mu)} \quad (7.9)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de Poisson. De las Ecs. (2.13), (7.8) y (7.9), se desprende que:

$$G(x) = \frac{E(x)}{2(1+\mu)} = \frac{E_0}{2(1+\mu)} f_E(x) = G_0 f_E(x) \rightarrow f_E(x) = f_G(x) \quad (7.10)$$

Por otra parte, se puede expresar a la energía cinética  $T_{m\acute{a}x}$ , independizada de la variable temporal  $t$  y adimensionalizada respecto de la longitud  $L$  de la viga, como:

$$T_{m\acute{a}x} = T_{m\acute{a}x(1)} + T_{m\acute{a}x(2)} \quad (7.11)$$

donde:

$$T_{m\acute{a}x(1)} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^1 \rho(x) \left[ A(x) (V_a(x))^2 L^2 + I(x) (\Psi_a(x))^2 \right] L dx \quad (7.12)$$

es la energía cinética propia de la viga. Si se consideran masas puntuales adosadas a la viga, se deben adicionar a la Ec. (7.11) los términos de energía cinética traslacional y rotacional que aporta cada masa  $k$ -ésima:

$$T_{m\acute{a}x(2)} = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \sum_{k=1}^{N_m} m_k L^2 (V_a(x)|_{x=x_{mk}})^2 + \sum_{i=1}^{N_m} m_k r_{gk}^2 (\Psi_a(x)|_{x=x_{mk}})^2 \right\} \quad (7.13)$$

donde  $r_{gk}$  es el radio de giro de la masa  $m_k$  adosada, con respecto al eje de la viga, y  $x_{mk}$  es la posición donde está ubicada dicha masa  $k$ -ésima.

Reemplazando las Ecs. (7.7), (7.12) y (7.13) en la Ec. (7.6), y considerando las Ecs. (2.13), (7.8) y (7.10), el funcional de energía  $J$  puede ser expresado como:

$$J[V_a(x), \Psi_a(x)] = \int_0^1 \left[ f_E f_I (\Psi_a')^2 + \frac{S^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} (V_a' - \Psi_a)^2 \right] dx - \Omega^2 \int_0^1 \left[ f_\rho f_A (V_a)^2 + \frac{f_\rho f_A}{S^2} (\Psi_a)^2 \right] dx - \Omega^2 \left[ \sum_{k=1}^{N_m} M_k \left( (V_a|_{x=x_{mk}})^2 + c_{mk}^2 (\Psi_a|_{x=x_{mk}})^2 \right) \right] \quad (7.14)$$

con

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_0 A_0}{E_0 I_0}}, \quad M_k = \frac{m_k}{\rho_0 A_0 L}, \quad c_{mk} = \frac{r_{gk}}{L}, \quad S = L \sqrt{\frac{A_0}{I_0}}, \quad \lambda = \frac{2(1+\mu)}{\kappa}, \quad \Psi_a' = \frac{d\Psi_a}{dx}, \quad V_a' = \frac{dV_a}{dx}$$

donde  $S$  es el parámetro que permite considerar la esbeltez de la viga.

A continuación, el funcional  $J$  es minimizado respecto a cada constante arbitraria:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J[V_a(x), \Psi_a(x)]}{\partial C_i} &= 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N_p \\ \frac{\partial J[V_a(x), \Psi_a(x)]}{\partial D_j} &= 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, N_q \end{aligned} \quad (7.15)$$

dando como resultado un sistema de ecuaciones lineales, análogo al de la Ec. (2.17), que para este caso se escribe en forma simbólica como:

$$\mathbf{R} \begin{Bmatrix} C_i \\ D_j \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (7.16)$$

Sea el determinante de la matriz  $\mathbf{R}$  la ecuación de los coeficientes de frecuencia, la misma puede escribirse en términos de las matrices de rigidez  $\mathbf{K}$  y de masa  $\mathbf{M}$ , como:

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (7.17)$$

donde los elementos  $k_{ij}$  que constituyen a la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  son:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} k_{ii} &= \frac{S^2}{\lambda} \int_0^1 (f_E f_A p_i' p_i') dx \\ k_{ij} &= -\frac{S^2}{\lambda} \int_0^1 (f_E f_A p_i' q_j) dx \\ k_{ji} &= -\frac{S^2}{\lambda} \int_0^1 (f_E f_A q_j p_i') dx \\ k_{jj} &= \int_0^1 (f_E f_I q_j' q_j') dx + \frac{S^2}{\lambda} \int_0^1 (f_E f_A q_j q_j) dx \end{aligned} \quad (7.18)$$

y los correspondientes elementos  $m_{ij}$  para la matriz de masa  $\mathbf{M}$ , tienen la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \int_0^1 (f_\rho f_A p_i p_i) dx + \sum_{k=1}^{N_p} M_k p_i(x_{mk}) p_i(x_{mk}) \\ m_{ij} &= 0 \\ m_{ji} &= 0 \\ m_{jj} &= \frac{1}{S^2} \int_0^1 (f_\rho f_I q_j q_j) dx + \sum_{k=1}^{N_q} M_k c_{mk}^2 q_j(x_{mk}) q_j(x_{mk}) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Finalmente, el problema de autovalores puede ser expresado como:

$$|\mathbf{KM}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{I}| = |\mathbf{B} - \zeta \mathbf{I}| = 0 \quad (7.20)$$

con  $\zeta = \Omega^2$  como los autovalores de la matriz  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{I}$  la matriz identidad.

## 7.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Algunos de los casos de comparación y propuestos, aquí resueltos, forman parte de la publicación del trabajo de [Rossit et al. \(2018\)](#).

### 7.3.1 Casos de comparación

Debido a que en la literatura técnica, no se encontraron valores para las frecuencias naturales

de vigas Timoshenko AFG con masas adosadas. Con el fin de verificar la precisión del modelo propuesto, las comparaciones se hacen con casos particulares disponibles en la literatura.

Los resultados expuestos corresponden a  $N_p = N_q = 20$  términos de polinomios en el método de Rayleigh-Ritz. El número de términos a emplear se determinó de desarrollar el correspondiente estudio de convergencia (Ver Anexo 2).

### 7.3.1.1 Viga cantiléver AFG ahusada sin masa adosada

Este caso fue estudiado por [Shahba et al. \(2011\)](#), [Huang et al. \(2013\)](#), [Rajasekaran y Norouzzadeh Tochaei \(2014\)](#) y [Zhao et al. \(2017\)](#); quienes obtuvieron los primeros cuatro coeficientes de frecuencia naturales. La viga AFG está compuesta por dos materiales, zirconia ( $\text{ZrO}_2$ ) y aluminio (Al), cuyas propiedades son:

$$\text{ZrO}_2: E_0 = 200 \text{ GPa}, \rho_0 = 5700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ y Al: } E_1 = 70 \text{ GPa}, \rho_0 = 2702 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \mu = \mu_0 = \mu_1 = 0.30 \quad (7.21)$$

De acuerdo con los subíndices, en la coordenada  $x=0$  (empotramiento) la zirconia constituye el 100% de la sección transversal y su contenido en porcentaje varía hasta la coordenada  $x=1$  (extremo libre) donde el aluminio constituye el 100% de la sección transversal. Para modelar este caso, es necesario adoptar  $n=2$  en la ley de variación asimétrica definida en la Ec. (2.12), y para la geometría considerar que:  $f_A = 1 - 0.1x$ ,  $f_I = (1 - 0.1x)^3$  en las Ecs. (2.13). Los demás parámetros que caracterizan a la viga son:  $S=10$ ,  $\kappa=5/6$ .

En la [Tabla 7.1](#), se presentan los primeros 4 coeficientes de frecuencia obtenidos por los autores nombrados y para la presente modelación con el método de Rayleigh-Ritz. Se observa que los resultados obtenidos, tienen muy buena concordancia en relación a los valores que brindan los autores citados. En particular, se aprecia que la solución tiene mayor semejanza con los resultados presentados por [Huang et al. \(2013\)](#).

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	Solución
3.9359	15.1577	31.2638	47.7164	<a href="#">Shahba et al.(2011)</a>
3.93579	15.1533	31.2239	47.5857	<a href="#">Huang et al.(2013)</a>
3.9358	15.1532	31.2236	47.5830	<a href="#">Rajasekaran et al.(2014)</a>
3.93585	15.1540	31.2257	47.5871	<a href="#">Zhao et al. (2017)</a>
3.93579	15.1533	31.2239	47.5836	M.R-Ritz

Tabla 7.1: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver Timoshenko AFG (composición  $\text{ZrO}_2$ -Al y propiedades variando con  $n=2$  en Ec. (2.12)), de sección transversal ahusada.  $S=10$ ,  $\kappa=5/6$ .

### 7.3.1.2 Viga cantiléver ahusada homogénea con masa adosada

[Lee y Lin \(1995\)](#) y [Torabi et al. \(2013\)](#), estudiaron el caso de una viga Timoshenko

( $\kappa = 2/3$ ;  $\mu = 0.25$ ) en voladizo con una masa puntual adosada ( $M = 0.32$ ), sin considerar su inercia rotacional ( $c_m = 0$ ), en el extremo libre ( $x_m = 1$ ) y para dos relaciones de esbelteces. Para la variación de las características de la sección transversal establecieron las siguientes leyes:  $f_A = 1 - 0.4x$  y  $f_I = (1 - 0.4x)^3$ .

En la [Tabla 7.2](#), se muestran los primeros 5 coeficientes de frecuencia hallados por los autores y los correspondientes a la presente modelación con el método de Rayleigh-Ritz.

$S$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
10	1.99774	10.6947	24.3869	40.1487	56.7489	M.R-Ritz
	1.997	10.695	24.388	40.174	56.739	<a href="#">Torabi et al. (2013)</a>
	2.015	11.07	25.63	—	—	<a href="#">Lee y Lin (1995)</a>
25	2.09569	13.4311	36.1016	66.6219	102.108	M.R-Ritz
	2.117	13.420	36.109	66.697	102.451	<a href="#">Torabi et al. (2013)</a>
	2.099	13.55	36.76	—	—	<a href="#">Lee y Lin (1995)</a>

Tabla 7.2: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver Timoshenko homogénea, de sección transversal ahusada,  $S$ : variable,  $\kappa = 2/3$ ,  $\mu = 0.25$  y con masa adosada ( $M = 0.32$ ) con ( $c_m = 0$ ) en  $x_m = 1$ .

Como puede verse, la concordancia entre resultados es relativamente buena.

### 7.3.1.3 Viga cantiléver ahusada homogénea con $N_m$ masas adosadas:

En el capítulo 3, se presentó para la comparación del modelo de vigas Bernoulli-Euler AFG ([Figura 3.1](#)), una viga en voladizo con múltiples masas puntuales adosadas. La viga en consideración, estudiada por [Wu y Chen \(2003\)](#) y [Chen y Liu \(2006\)](#), está constituida por acero (con módulo de Young  $E = 2.051 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  y densidad de masa  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ), es de sección transversal variable: con ancho constante  $b = b_0 = b_L = 0.10 \text{ m}$ , altura  $h$  con variación lineal desde el extremo empotrado  $h_0 = 0.40 \text{ m}$  hasta el extremo libre  $h_L = 0.08 \text{ m}$  y posee una longitud de viga  $L = 1.60 \text{ m}$ .

De acuerdo con lo especificado en el capítulo 1, los resultados son prácticamente aceptables, para las primeras frecuencias naturales de vibración transversal, en la teoría de Bernoulli-Euler cuando se cumple la siguiente relación adimensional  $I_z / AL^2 = 10^{-7}$  ([Rossi et al., 1990](#)). Poniendo esta relación en términos del parámetro de esbeltez  $S$  definido en la Ec (7.14):

$$\frac{1}{S^2} = \frac{I_z}{AL^2} = 10^{-7} \rightarrow S \approx 3162. \quad (7.22)$$

Esto indica que para el parámetro  $S \approx 3162$  las vigas pueden considerarse esbeltas. [Bambill y Rossit \(2014\)](#) evidencian que para  $S \geq 2500$  ya los resultados de la teoría de Timoshenko,

coinciden con los de Bernoulli-Euler para las primeras frecuencias naturales.

Teniendo en cuenta que la geometría de la viga a analizar, si se reemplazan sus parámetros geométricos, en la expresión del coeficiente de esbeltez  $S$  de la Ec (7.14), se obtiene:

$$S = L \sqrt{\frac{A_0}{I_0}} = \sqrt{12} \frac{L}{h_0} = \sqrt{12} \times \frac{1.60 \text{ m}}{0.40 \text{ m}} = 8\sqrt{3} \cong 13.86 < 3162. \quad (7.23)$$

Esto indica que el emplear la teoría de vigas de Bernoulli-Euler no sería lo más adecuado para este caso. Debe recurrirse, a la teoría de vigas de Timoshenko para obtener los valores de los primeros coeficientes de frecuencia, por tratarse de una viga de pequeña esbeltez.

Seguidamente, se obtiene la solución del modelo planteado por medio la teoría de vigas de Timoshenko, para contrastarla con la solución que obtuvieron los autores mencionados.

En las Tablas 7.3, 7.4 y 7.5, se presentan las primeras 5 frecuencias naturales de la viga  $\omega_i = \Omega_i \sqrt{(E_0 I_0) / (\rho_0 A_0)} / L^2$ , para las dos teorías de vigas citadas, y para los siguientes casos:

- 1) Viga sin masas adosadas (caso adicional de comparación).
- 2) Viga con una masa puntual adosada en el extremo libre ( $x_{m1} = 1$ ).
- 3) Viga con cinco masas puntuales adosadas en posiciones equidistantes. Con coordenadas adimensionales:  $x_{m1} = 0.125$ ,  $x_{m2} = 0.3125$ ,  $x_{m3} = 0.50$ ,  $x_{m4} = 0.6875$  y  $x_{m5} = 0.875$ .

El modelo considera que las masas adosadas son todas iguales y tienen una magnitud equivalente a la quinta parte de la masa real de la viga. Es decir:

$$m_k = (\rho AL) / 5 = 60.288 \text{ kg}; \quad (7.24)$$

por lo tanto, el coeficiente de masas a adoptar, en la formulación establecida, es:

$$M_k = m_k / (\rho_0 A_0 L) = 0.12. \quad (7.25)$$

Además, como estos autores no consideraron la inercia rotacional de las masas, debe adoptarse en la Ec. (7.14)  $c_{mk} = 0$  para  $k = 1$  a  $5$ .

Solución		Wu y Chen (2003)	Chen y Liu (2006)	M. R-Ritz	M. R-Ritz
$\omega$ (rad/s)	$\omega_1$	989.5017	989.6626	989.6626	955.9333
	$\omega_2$	3628.631	3629.582	3629.582	3237.714
	$\omega_3$	8501.331	8503.974	8503.974	6832.206
	$\omega_4$	15699.47	15704.69	15704.69	11291.47
	$\omega_5$	25258.86	25267.51	25267.51	16326.56
Teoría de vigas		Bernoulli-Euler			Timoshenko

Tabla 7.3: Caso 1: Frecuencias naturales para una viga cantiléver homogénea de sección ahusada, con ancho constante  $b = b_0$ , altura variando  $h$  linealmente (de  $h_0$  a  $h_L$ ) y sin masa adosada ( $M = 0$ ).

Solución		Wu y Chen (2003)	Chen y Liu (2006)	M. R-Ritz	M. R-Ritz
$\omega$ (rad/s)	$\omega_1$	569.3039	569.6273	569.3747	557.5622
	$\omega_2$	2503.298	2508.895	2503.714	2297.209
	$\omega_3$	6709.049	6743.232	6710.268	5548.167
	$\omega_4$	13286.50	13408.53	13289.00	9823.906
	$\omega_5$	22236.49	22570.17	22240.74	14743.28
Teoría de vigas		Bernoulli-Euler			Timoshenko

Tabla 7.4: Caso 2: Frecuencias naturales para una viga cantiléver homogénea de sección ahusada, con ancho constante  $b = b_0$ , altura variando  $h$  linealmente (de  $h_0$  a  $h_L$ ) y con una masa adosada ( $M = 0.12$ ) en  $x_{m1} = 1$ .

Solución		Wu y Chen (2003)	Chen y Liu (2006)	M. R-Ritz	M. R-Ritz
$\omega$ (rad/s)	$\omega_1$	613.1226	613.2201	613.1940	594.5235
	$\omega_2$	2524.339	2525.538	2524.883	2259.803
	$\omega_3$	6353.496	6366.500	6356.546	5056.297
	$\omega_4$	12105.936	12184.03	12116.38	8716.683
	$\omega_5$	15885.10	16089.95	15928.03	11551.54
Teoría de vigas		Bernoulli-Euler			Timoshenko

Tabla 7.5: Caso 3: Frecuencias naturales para una viga cantiléver homogénea de sección ahusada, con ancho constante  $b = b_0$ , altura variando  $h$  linealmente (de  $h_0$  a  $h_L$ ) y con cinco masas adosadas ( $M = 0.12$ ) en  $x_{m1} = 0.125, x_{m2} = 0.3125, x_{m3} = 0.50, x_{m4} = 0.6875$  y  $x_{m5} = 0.875$ .

Se aprecia en los resultados de las [Tablas 7.3, 7.4 y 7.5](#), que las frecuencias naturales de vibración que brinda la teoría de vigas de Timoshenko son más bajas en relación a la teoría de Bernoulli-Euler. Esto se justifica en que, al considerar el efecto de corte, mecanismos adicionales de la deformación efectiva hacen que la viga se vuelva más flexible (disminuya su rigidez), aumentando la deflexión y disminuyendo las frecuencias. Este efecto es más evidente para las frecuencias más altas, debido a que la longitud de onda se hace más corta, y por lo tanto disminuye la distancia entre las fuerzas opuestas de corte.

### 7.3.2 Casos propuestos

Se estudian las vibraciones libres de vigas AFG en voladizo que vibran con masas adosadas, para evidenciar los efectos que contempla la teoría de Timoshenko. La influencia se muestra, en particular, al variar la esbeltez de la viga por medio de la relación:  $(L/h_0) = (S/\sqrt{12})$ . Adicionalmente, se incorpora al cálculo el efecto de la inercia rotacional de la masa puntual ( $c_m$ ), que no se ha tenido en cuenta en las vigas presentadas anteriormente.

La infinidad de casos que pueden evaluarse, debido a la cantidad y variabilidad de los parámetros involucrados en la descripción del comportamiento del modelo planteado, conlleva a considerar algunos casos representativos que demuestren el alcance de lo propuesto. Para

ello, se consideraran 3 casos de vigas, en las cuales el ancho es constante  $b = b_0$  y la altura  $h$  puede ser: constante con  $h(x) = h_0$ , variar de forma lineal con  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ , o bien variar de forma cuadrática con  $h(x) = h_0(1 - 0.5x^2)$ .

Las propiedades del material, como la densidad de masa  $\rho$ , el módulo de Young  $E$  y el módulo de corte  $G$  se consideran variando axialmente de acuerdo con la Ec. (2.12). Y particularmente, se estudian los casos en que  $n=0$  (material homogéneo),  $n=1$  (material AFG con variación lineal) y  $n=2$  (material AFG con variación cuadrática).

En los cálculos se emplea el material AFG propuesto por Su et al. (2013), con composición Alúmina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ )- Acero. Las propiedades de los materiales constituyentes son:

$$E_{\text{Alum}} = 390 \text{ GPa}, \rho_{\text{Alum}} = 3960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, E_{\text{Ac}} = 210 \text{ GPa}, \rho_{\text{Ac}} = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \mu_{\text{Ac}} = \mu_{\text{Alum}} = 0.30. \quad (7.26)$$

De la Ec. (7.26) se observa que coeficiente de Poisson  $\mu$  es el mismo para ambos materiales. El factor de corrección por corte se adopta  $\kappa = 5/6$  por ser la sección rectangular y maciza; y para todas las masas puntuales adosadas, se considera la misma magnitud:

$$M_k = 0.20 \text{ con } c_{km} = \frac{r_{gk}}{L} = 0.10, \text{ para } k = 1 \text{ a } 5 \quad (7.27)$$

y ubicadas de acuerdo a las coordenadas especificadas en el caso de comparación. Es decir, para una masa, adosada en el extremo libre ( $x_{m1} = 1$ ) y para las 5 masas, en las coordenadas adimensionales:  $x_{m1} = 0.125$ ,  $x_{m2} = 0.3125$ ,  $x_{m3} = 0.50$ ,  $x_{m4} = 0.6875$  y  $x_{m5} = 0.875$ .

A continuación, se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia, para varios casos de vigas cantiléver, utilizando la teoría de vigas de Timoshenko.

### 7.3.2.1 Viga cantiléver de sección constante

En las Tablas 7.6, 7.7 y 7.8, se muestran los primeros 5 coeficientes de frecuencia para el caso en que la viga cantiléver soporta una sola masa puntual en el extremo libre.

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	2.54194	14.9766	36.0632	58.2745	80.1809
10	2.58555	16.5075	42.2620	72.7142	110.638
50	2.60006	17.1072	45.0920	81.2351	134.242
100	2.60052	17.1271	45.1905	81.5685	135.304
500	2.60067	17.1334	45.2222	81.6763	135.650
1000	2.60067	17.1336	45.2232	81.6797	135.661
Bernoulli-Euler	2.60067	17.1337	45.2235	81.6808	135.665

Tabla 7.6: Viga cantiléver homogénea de sección constante con una masa ( $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ ).



$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.34829	19.8394	46.9173	73.3246	102.703
10	3.40838	21.6463	53.6295	92.2201	145.236
50	3.42841	22.3383	56.5655	103.357	177.770
100	3.42904	22.3610	56.6666	103.792	179.229
500	3.42924	22.3683	56.6991	103.933	179.704
1000	3.42925	22.3685	56.7001	103.938	179.719
Bernoulli-Euler	3.42925	22.3686	56.7004	103.939	179.724

Tabla 7.7: Viga cantiléver AFG ( $n = 1$ ) de sección constante con una masa ( $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ ).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.54562	21.9903	51.2858	79.3375	112.275
10	3.60659	23.9592	58.2990	100.550	159.952
50	3.62687	24.7089	61.3523	113.097	196.749
100	3.62752	24.7335	61.4573	113.588	198.402
500	3.62772	24.7413	61.4911	113.747	198.942
1000	3.62773	24.7416	61.4921	113.752	198.958
Bernoulli-Euler	3.62773	24.7417	61.4925	113.753	198.964

Tabla 7.8: Viga cantiléver AFG ( $n = 2$ ) de sección constante con una masa  $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ .

En las [Tablas 7.9](#), [7.10](#) y [7.11](#) se muestran los coeficientes de frecuencia para el caso en que la viga en voladizo que soporta cinco masas en las posiciones especificadas anteriormente.

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	2.43841	12.7810	29.7909	48.2968	66.1357
10	2.48796	14.2148	35.3225	60.3448	86.0333
50	2.50451	14.7776	37.7579	65.5820	92.5313
100	2.50503	14.7962	37.8406	65.7545	92.7133
500	2.50520	14.8021	37.8672	65.8098	92.7713
1000	2.50520	14.8023	37.8680	65.8115	92.7731
Bernoulli-Euler	2.50521	14.8024	37.8683	65.8121	92.7737

Tabla 7.9: Viga cantiléver homogénea de sección constante, con 5 masas ( $M_k = 0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k = 1$  a  $5$ ).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.23626	16.4700	37.9351	61.1330	81.6097
10	3.30459	18.1701	44.3662	75.0797	106.929
50	3.32745	18.8275	47.0851	80.7295	114.717
100	3.32817	18.8491	47.1763	80.9125	114.934
500	3.32840	18.8561	47.2056	80.9711	115.003
1000	3.32841	18.8563	47.2065	80.9730	115.005
Bernoulli-Euler	3.32841	18.8563	47.2068	80.9736	115.006

Tabla 7.10: Viga cantiléver AFG ( $n = 1$ ), con 5 masas ( $M_k = 0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k = 1$  a  $5$ ).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.41397	17.7453	40.7326	65.4271	86.8673
10	3.48319	19.5758	47.5683	80.1882	114.097
50	3.50630	20.2814	50.4285	86.0656	122.272
100	3.50703	20.3045	50.5241	86.2543	122.493
500	3.50726	20.3120	50.5547	86.3147	122.564
1000	3.50727	20.3122	50.5557	86.3166	122.566
Bernoulli-Euler	3.50727	20.3123	50.5560	86.3172	122.567

Tabla 7.11: Viga cantiléver AFG ( $n = 2$ ), con 5 masas ( $M_k = 0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k = 1$  a  $5$ ).

### 7.3.2.2 Viga cantiléver con altura variando linealmente

En las Tablas 7.12, 7.13 y 7.14, se muestran los primeros 5 coeficientes de frecuencia para el caso en que la viga cantiléver soporta una sola masa puntual en el extremo libre. La viga posee sección transversal ahusada, con ancho constante  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ .

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	2.33024	11.3248	24.0370	40.2821	63.5245
10	2.35896	11.8722	25.9123	47.5137	81.4416
50	2.36840	12.0634	26.6545	51.0289	92.1140
100	2.36869	12.0695	26.6791	51.1542	92.5288
500	2.36879	12.0715	26.6871	51.1945	92.6629
1000	2.36879	12.0716	26.6873	51.1957	92.6671
Bernoulli-Euler	2.36879	12.0716	26.6874	51.1961	92.6685

Tabla 7.12: Viga cantiléver homogénea, de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ . Con una masa ( $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ ).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	2.97234	14.2004	29.1090	52.1610	84.7811
10	3.01078	14.7226	31.2678	61.6689	108.433
50	3.02342	14.9005	32.1233	66.1892	122.226
100	3.02382	14.9061	32.1517	66.3491	122.758
500	3.02394	14.9079	32.1608	66.4006	122.930
1000	3.02395	14.9080	32.1611	66.4022	122.935
Bernoulli-Euler	3.02395	14.9080	32.1612	66.4027	122.937

Tabla 7.13: Viga cantiléver AFG ( $n = 1$ ), de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ . Con una masa ( $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ ).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.15009	15.4188	31.3066	57.3765	93.6788
10	3.18984	15.9336	33.6813	68.0832	120.233
50	3.20290	16.1075	34.6228	73.1800	135.799
100	3.20331	16.1130	34.6541	73.3625	136.400
500	3.20344	16.1148	34.6641	73.4206	136.594
1000	3.20344	16.1148	34.6644	73.4224	136.600
Bernoulli-Euler	3.20344	16.1149	34.6645	73.4230	136.603

Tabla 7.14: Viga cantiléver AFG ( $n = 2$ ), de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ . Con una masa ( $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ ).

En las Tablas 7.15, 7.16 y 7.17, se muestran los primeros 5 coeficientes de frecuencia para correspondientes a cuando la viga cantiléver soporta 5 masas puntuales.

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	2.30699	10.0072	22.1158	35.8282	50.5917
10	2.34456	10.6477	24.3802	40.6387	61.2522
50	2.35696	10.8769	25.2302	42.4695	65.4560
100	2.35735	10.8843	25.2578	42.5287	65.5890
500	2.35748	10.8866	25.2667	42.5477	65.6316
1000	2.35748	10.8867	25.2669	42.5483	65.6329
Bernoulli-Euler	2.35748	10.8867	25.2670	42.5485	65.6333

Tabla 7.15: Viga cantiléver homogénea de sección ahusada, con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ . Con 5 masas ( $M_k = 0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k = 1$  a 5).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.00275	12.5156	27.2624	43.9920	61.9956
10	3.05320	13.2269	29.6525	49.5382	77.8066
50	3.06988	13.4780	30.5237	51.6007	84.0188
100	3.07041	13.4860	30.5518	51.6671	84.2099
500	3.07057	13.4886	30.5608	51.6884	84.2709
1000	3.07058	13.4887	30.5611	51.6890	84.2728
Bernoulli-Euler	3.07058	13.4887	30.5612	51.6893	84.2734

Tabla 7.16: Viga cantiléver AFG ( $n = 1$ ), de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ . Con 5 masas ( $M_k = 0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k = 1$  a 5).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.17152	13.4164	29.1166	46.8902	66.0702
10	3.22324	14.1710	31.6319	52.8478	82.7610
50	3.24032	14.4364	32.5434	55.0502	89.1067
100	3.24086	14.4449	32.5727	55.1209	89.2986
500	3.24103	14.4476	32.5821	55.1435	89.3599
1000	3.24103	14.4477	32.5824	55.1442	89.3618
Bernoulli-Euler	3.24104	14.4477	32.5825	55.1445	89.3624

Tabla 7.17: Viga cantiléver AFG ( $n = 2$ ), de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ . Con 5 masas ( $M_k = 0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k = 1$  a 5).

### 7.3.2.3 Viga cantiléver con altura variando cuadráticamente

En las Tablas 7.18, 7.19 y 7.20, se muestran los primeros 5 coeficientes de frecuencia para el caso en que la viga cantiléver soporta una sola masa puntual en el extremo libre. La viga posee sección transversal ahusada, con ancho constante  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x^2)$ .

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	2.61342	12.4385	25.7434	42.1832	66.2152
10	2.65308	13.1585	27.9641	50.8473	87.2670
50	2.66619	13.4136	28.8753	55.3339	100.861
100	2.66661	13.4218	28.9059	55.4978	101.411
500	2.66674	13.4244	28.9157	55.5506	101.589
1000	2.66674	13.4245	28.9160	55.5522	101.595
Bernoulli-Euler	2.66674	13.4245	28.9161	55.5528	101.597

Tabla 7.18: Viga cantiléver homogénea, de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x^2)$ . Una masa ( $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ ).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.37453	15.5940	30.9115	54.5280	88.4008
10	3.42831	16.2669	33.4780	66.0183	116.311
50	3.44611	16.4974	34.5370	71.8186	133.950
100	3.44667	16.5047	34.5726	72.0287	134.657
500	3.44685	16.5071	34.5840	72.0964	134.886
1000	3.44686	16.5072	34.5844	72.0985	134.893
Bernoulli-Euler	3.44686	16.5072	34.5845	72.0992	134.896

Tabla 7.19: Viga cantiléver AFG ( $n = 1$ ), de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x^2)$ . Con una masa ( $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ ).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.57172	16.9323	33.1276	59.9104	97.620
10	3.62692	17.5915	35.9643	72.8383	128.876
50	3.64517	17.8147	37.1361	79.3762	148.734
100	3.64574	17.8218	37.1755	79.6132	149.531
500	3.64592	17.8240	37.1881	79.6896	149.789
1000	3.64593	17.8241	37.1885	79.6919	149.797
Bernoulli-Euler	3.64593	17.8241	37.1886	79.6927	149.800

Tabla 7.20: Viga cantiléver AFG ( $n = 2$ ), de sección ahusada con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x^2)$ . Con una masa ( $M_1 = 0.20$  en  $x_{m1} = 1$ ).

En las [Tablas 7.21](#), [7.22](#) y [7.23](#), se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia para correspondientes a cuando la viga cantiléver soporta 5 masas puntuales.

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	2.54668	11.4422	25.0435	40.2884	55.9815
10	2.59584	12.3499	28.1789	47.0494	70.4052
50	2.61217	12.6836	29.4089	49.8045	76.3278
100	2.61269	12.6944	29.4493	49.8951	76.5124
500	2.61285	12.6979	29.4623	49.9241	76.5714
1000	2.61286	12.6980	29.4627	49.9250	76.5733
Bernoulli-Euler	2.61286	12.6980	29.4628	49.9253	76.5739

Tabla 7.21: Viga cantiléver homogénea de sección ahusada, con ancho  $b = b_0$  y altura  $h(x) = h_0(1 - 0.5x)$ . Con 5 masas ( $M_k = 0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k = 1$  a  $5$ ).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.34776	14.4042	31.0773	49.7108	68.3974
10	3.41463	15.4125	34.4194	57.6441	89.0157
50	3.43689	15.7767	35.6846	60.7844	97.5336
100	3.43759	15.7884	35.7258	60.8869	97.7912
500	3.43782	15.7922	35.7390	60.9198	97.8734
1000	3.43783	15.7923	35.7394	60.9208	97.8759
Bernoulli-Euler	3.43783	15.7923	35.7395	60.9211	97.8768

Tabla 7.22: Viga cantiléver AFG ( $n=1$ ), de sección ahusada con ancho  $b=b_0$  y altura  $h(x)=h_0(1-0.5x)$ . Con 5 masas ( $M_k=0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k=1$  a 5).

$L/h_0$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.53034	15.4729	33.2349	53.0152	72.9484
10	3.59840	16.5480	36.7570	61.5285	94.8568
50	3.62101	16.9345	38.0812	64.8727	103.644
100	3.62173	16.9470	38.1242	64.9813	103.905
500	3.62196	16.9510	38.1380	65.0161	103.988
1000	3.62196	16.9511	38.1384	65.0172	103.990
Bernoulli-Euler	3.62196	16.9511	38.1386	65.0176	103.991

Tabla 7.23: Viga cantiléver AFG ( $n=2$ ), de sección ahusada con ancho  $b=b_0$  y altura  $h(x)=h_0(1-0.5x)$ . Con 5 masas ( $M_k=0.20$  en  $x_{mk}$  para  $k=1$  a 5).

Como puede verse y era de esperarse, en las tablas expuestas (Tablas 7.5 a 7.23), en la medida que la esbeltez de la viga aumenta, los valores de los coeficientes de frecuencia calculados con la teoría de Timoshenko tienden a los valores obtenidos usando la teoría más simple de Bernoulli-Euler.

Es importante señalar que esta tendencia es válida para variaciones suaves de la sección transversal. Para relaciones de estrechamiento grandes ( $h_L/h_0$  que se aproximan a 0), el modelo se aleja más de la teoría clásica de la resistencia de los materiales y la tendencia deja de ser uniforme.

#### ❖ Variaciones de los coeficientes de frecuencia con la esbeltez

Una forma de contemplar, la diferencia que existe entre los valores de los coeficientes que brindan las teorías de Bernoulli-Euler y de Timoshenko, es de manera gráfica. Tomando como referencia, a los valores que se determinan empleando la teoría de vigas de Bernoulli-Euler, se puede graficar la variación en valor absoluto  $|\Delta\%|$  de la diferencia entre coeficientes de frecuencia equivalentes respecto del coeficiente de la teoría de Bernoulli-Euler:

$$|\Delta\%| = \frac{\Omega_{i \text{ Timoshenko}} - \Omega_{i \text{ Euler-Bernoulli}}}{\Omega_{i \text{ Euler-Bernoulli}}} \times 100, \quad (7.28)$$

en función del aumento de la esbeltez de las vigas. En las Figuras 7.3 a 7.7, se indica la

disminución del valor absoluto  $|\Delta\%|$ , de acuerdo con la variación de la esbeltez, para las vigas del caso 7.3.2.3:

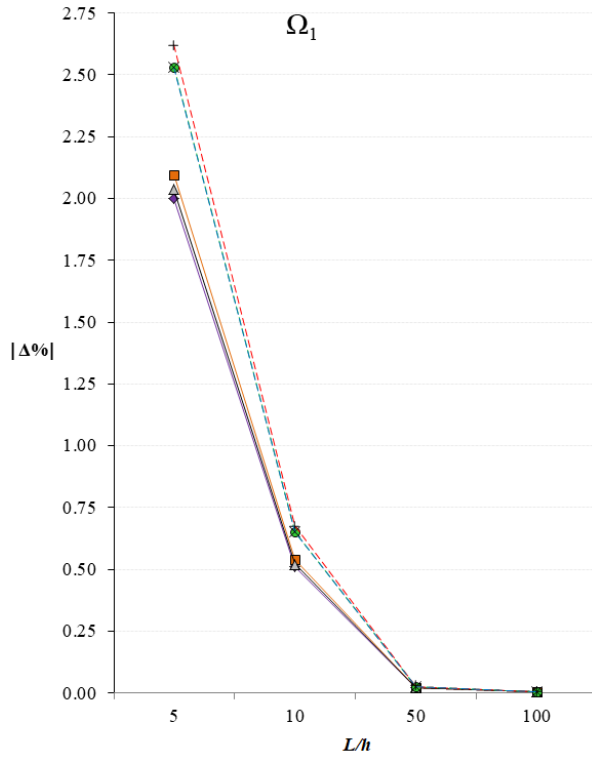


Fig. 7.3: Variación del 1<sup>er</sup> coeficiente de frecuencia en función del aumento de la esbeltez de las vigas.

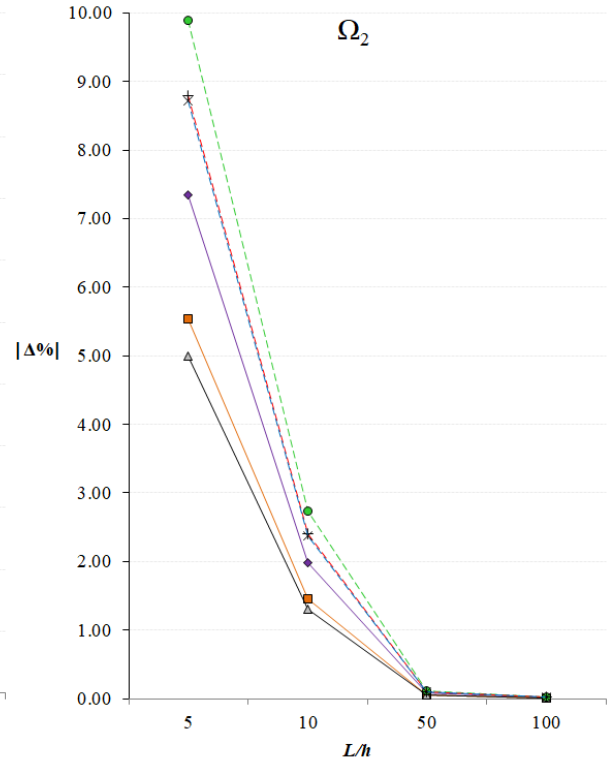


Fig. 7.4: Variación del 2<sup>do</sup> coeficiente de frecuencia en función del aumento de la esbeltez de las vigas.

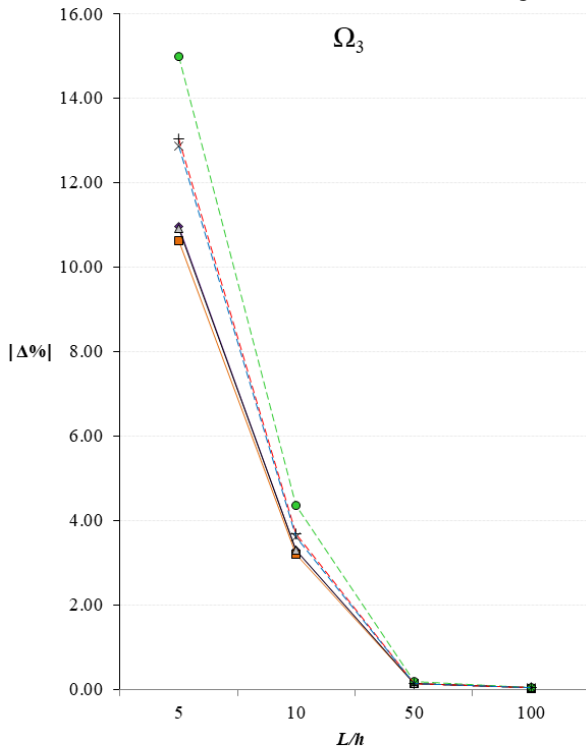


Fig. 7.5: Variación del 3<sup>er</sup> coeficiente de frecuencia en función del aumento de la esbeltez de las vigas.

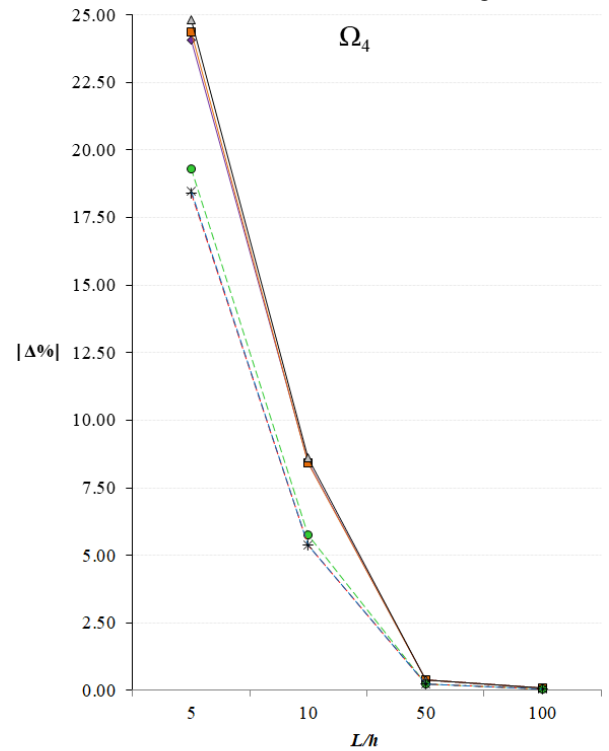


Fig. 7.6: Variación del 4<sup>to</sup> coeficiente de frecuencia en función del aumento de la esbeltez de las vigas.

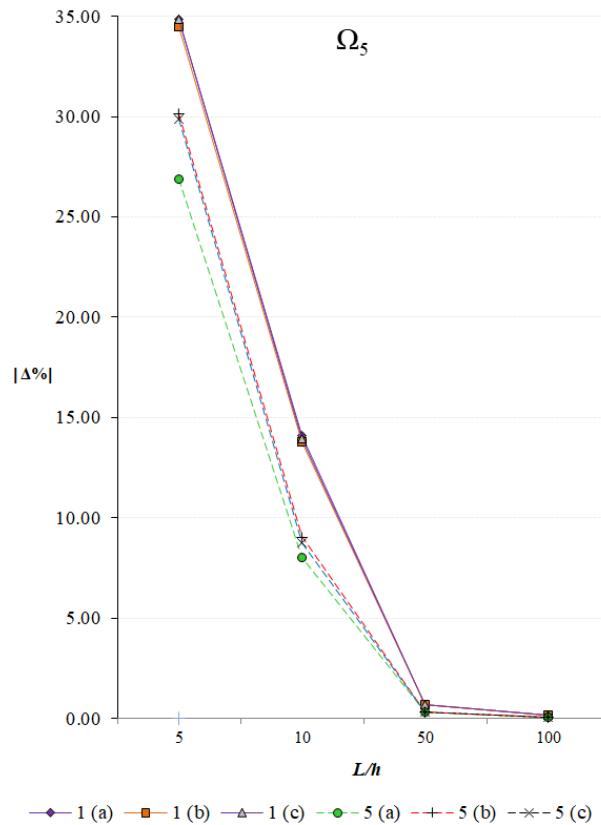


Fig. 7.7: Variación del 5<sup>to</sup> coeficiente de frecuencia en función del aumento de la esbeltez de las vigas.

Referencias para las Figuras 7.1 a 7.7:

1 (a): Viga homogénea con una masa adosada.	5 (a): Viga homogénea con cinco masas adosadas
1 (b): Viga AFG (lineal) con una masa adosada.	5 (b): Viga AFG (lineal) con cinco masas adosadas.
1 (c): Viga AFG (cuadrático) con una masa adosada.	5 (c): Viga AFG (cuadrático) con cinco masas adosadas.

Para mejorar la representación de las tendencias, se grafica hasta la relación  $(L/h) = 100$ , ya que para las vigas más esbeltas las diferencias son muy pequeñas.

Se observa que, para los 3 primeros coeficientes de frecuencia, la influencia de considerar la teoría de Timoshenko es mayor en las vigas con 5 masas, para todas las composiciones de materiales. Sin embargo, para el cuarto y quinto coeficiente de frecuencia, la influencia es mayor en vigas que llevan solo una masa adosada en el extremo libre.

En términos de la composición, la teoría de Timoshenko influye, en general, de forma similar para los 2 casos de material AFG estudiados y para la viga de composición homogénea. Solo en el caso de la viga con 5 masas y para el quinto coeficiente, la influencia de la teoría de Timoshenko es mayor para los 2 casos con materiales AFG que para la viga homogénea.

## 7.4 REFERENCIAS

Chen, D.W. y Liu, T.L., Free and forced vibrations of a tapered cantilever beam carrying multiple point masses. *Structural Engineering and Mechanics*, 23(2):209–216, 2006.

- Elishakoff, I., Kaplunov, J. y Nolde, E., Celebrating the centenary of Timoshenko's study of effects of shear deformation and rotary inertia. *Applied Mechanics Reviews*, 67(6), 2015.
- Huang, Y., Yang, L. y Luo, Q., Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section", *Composites: Part B*, 45:1493–1498, 2013.
- Kang, F. y Zhong-Ci, S., *Mathematical Theory of Elastic Structures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- Lee, S.Y. y Lin, S.M. Vibration of elastically restrained non-uniform Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 183:403-415, 1995.
- Rossi, R.E., Laura, P. A. A. y Gutiérrez, R.H., A note on transverse vibrations of a Timoshenko beam of non-uniform thickness clamped at one end and carrying a concentrated mass at the other. *Journal of Sound and Vibration*, 143(3):491–502, 1990.
- Rossit, C.A., Bambill, D.V. y Gilardi G.J., Timoshenko theory effect on the vibration of axially functionally graded cantilever beams carrying concentrated masses. *Structural Engineering and Mechanics*, 66(6):703–711, 2018.
- Rajasekaran, S. y Norouzzadeh Tochaie, E., Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation element method and differential quadrature element method of lowest-order. *Meccanica*, 49 (4): 995–1009, 2014.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. y Hajilar, S., Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part B*, 42:801–808, 2011.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Timoshenko, S.P., "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bar". *Philosophical Magazine*, 41:744–746, 1921.
- Timoshenko, S.P., "On the transverse vibrations of bars of uniform cross section". *Philosophical Magazine*, 43:125–131, 1922.
- Torabi, K., Afshari, H. y Heidari-Rarani M., Free vibration analysis of a non-uniform cantilever Timoshenko beam with multiple concentrated masses using DQEM. *Engineering Solid Mechanics*, 1: 9–20, 2013.
- Wu, J.S. y Chen, D.W., Bending vibrations of wedge beams with any number of point masses. *Journal of Sound and Vibrations*, 261:1073–1090, 2003.
- Zhao, Y., Huang, Y. y Guo, M., A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory. *Composite Structures*, 168:277–284, 2017.



# **CAPÍTULO 8**

## **DIVERSOS ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS TIMOSHENKO AFG**

### **MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ**

### **MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADA (GDQM)**

### **MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (FEM)**

### **TEORÍA DE VIGAS DE TIMOSHENKO**

## 8.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudian vigas AFG aplicando la teoría de vigas de Timoshenko y mediante los 3 métodos aproximados citados en los capítulos anteriores. Tal como se menciona en el capítulo 4, ante la presencia de singularidades en el dominio: geométricas, del material o bien una masa adosada, es necesario subdividir al dominio en dos partes.

## 8.2 GENERALIDADES DEL MODELO DE ANÁLISIS

El modelo de viga Timoshenko AFG presentado en la [Figura 8.1](#), de dos tramos, permite adosar una masa puntual  $m$  en una posición arbitraria del eje  $\bar{x}$  (dentro de la longitud  $L$ ), a la vez que posibilita elegir la combinación de condiciones de bordes clásicas, que se deseen estudiar en los extremos.

La viga presenta sección transversal de doble simetría (rectangular), con ancho  $b$  y altura  $h$ , que puede variar de manera ahusada en la dirección axial en cada tramo. En ambos tramos, además, se pueden adjudicar propiedades AFG distintas. El eje  $\bar{x}$ , con origen el extremo izquierdo de la viga, coincide con el eje de la viga (en la posición sin flexionar) y el eje  $\bar{y}$  es perpendicular al  $\bar{x}$  en el baricentro de la sección transversal inicial ([Gilardi et al., 2017](#)).

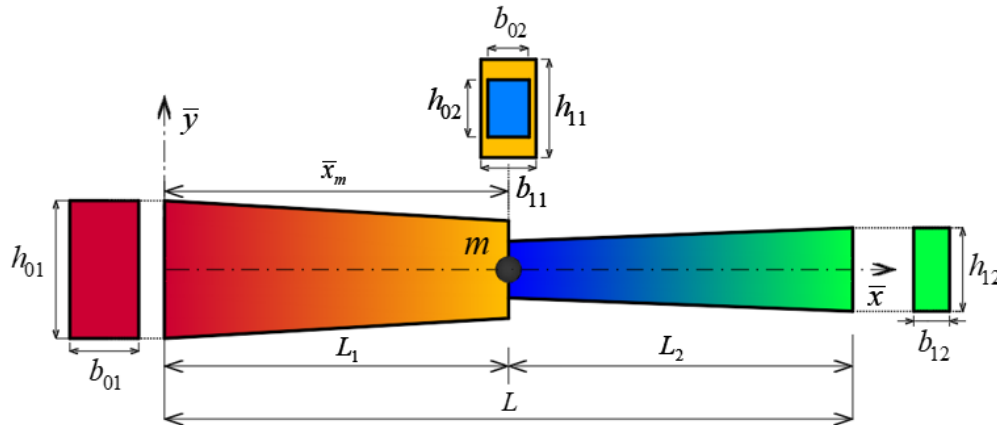


Figura 8.1: Esquema general del modelo para la viga Timoshenko AFG de dos tramos.

Las secciones extremas de cada tramo se identifican con un parámetro geométrico con dos subíndices. El primer subíndice indica la posición en el tramo: “0” para el extremo izquierdo y “1” para el derecho; y el segundo subíndice indica el tramo en consideración: “1” o “2”.

## 8.3 LEY DE VARIACIÓN PARA LAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS Y PROPIEDADES DEL MATERIAL

Se considera que la variación de las características geométricas y de las propiedades del

material AFG, están descritas por la ley axial asimétrica generalizada definida en la Ec. (5.3). En las Ecs. (5.4), se contempla a cada parámetro geométrico y del material como casos particulares de la Ec. (5.3); pero de acuerdo con la Ec. (7.8), se debe anexar también la variación del módulo de corte  $G$ . En la forma generalizada se lo puede escribir como:

$$G_k(x) = G_{0k} f_{Gk}(x) \text{ con } k=1,2. \quad (8.1)$$

Y debido a que el material se considera isótropo (Ec. (7.9)), entonces:

$$G_k(x) = \frac{E_k(x)}{2(1+\mu)} = \frac{E_{0k}}{2(1+\mu)} f_{Ek}(x) = G_{0k} f_{Ek}(x) \rightarrow f_{Ek}(x) = f_{Gk}(x) \quad (8.2)$$

## 8.4 MÉTODOS APROXIMADOS

### 8.4.1 Método de Rayleigh-Ritz

Contemplando las consideraciones hechas en el capítulo 7, para la determinación de los coeficientes de frecuencia naturales del sistema viga-masa adosada, se parte de la expresión del funcional de energía  $J$  dado por la Ec. (7.6).

$$J = U_{máx} - T_{máx}. \quad (8.3)$$

En el presente modelo (Figura 8.1), las expresiones de las energías máximas de deformación  $U_{máx}$  y cinética  $T_{máx}$ , independizas del tiempo  $t$  y considerando las amplitudes del desplazamiento y el giro aproximadas (según la Ec. (7.3)), adoptan la forma:

$$U_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^{x_s} \left[ \frac{E_1(x) I_1(x)}{L^2} \left( \frac{d\Psi_a(x)}{dx} \right)^2 + \kappa_1 G_1(x) A_1(x) \left( \frac{dV_a(x)}{dx} - \Psi_a(x) \right)^2 \right] L dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^1 \left[ \frac{E_2(x) I_2(x)}{L^2} \left( \frac{d\Psi_a(x)}{dx} \right)^2 + \kappa_2 G_2(x) A_2(x) \left( \frac{dV_a(x)}{dx} - \Psi_a(x) \right)^2 \right] L dx \quad (8.4)$$

$$T_{máx} = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \int_0^{x_s} \left[ \rho_1(x) A_1(x) L^2 (V_a(x))^2 + \rho_1(x) I_1(x) (\Psi_a(x))^2 \right] L dx + \int_{x_s}^1 \left[ \rho_2(x) A_2(x) L^2 (V_a(x))^2 + \rho_2(x) I_2(x) (\Psi_a(x))^2 \right] L dx + \frac{1}{2} \omega^2 m \left[ L^2 \left( V_a(x) \Big|_{x=x_{mk}} \right)^2 + r_g^2 \left( \Psi_a(x) \Big|_{x=x_{mk}} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.5)$$

Además, para el desarrollo se asume que el coeficiente de Poisson es constante, con  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  y que los factores de corrección por corte son iguales,  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ , por tener los tramos la misma forma geométrica. Al ser de sección rectangular maciza se adopta  $\kappa = 5/6$ .

Seguidamente, se reemplazan las Ecs. (8.4) y (8.5) en la expresión del funcional  $J$  (Ec. (8.3)). Y, además, contemplando las Ecs. (5.4), (8.1) y (8.2), se obtiene:

$$\begin{aligned}
J[V_a(x), \Psi_a(x)] = & \int_0^{x_s} \left[ f_{E1} f_{I1} (\Psi_a')^2 + \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} (V_a' - \Psi_a)^2 \right] dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left[ f_{E2} f_{I2} (\Psi_a')^2 + \right. \\
& + \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} (V_a' - \Psi_a)^2 \left. \right] dx - \Omega^2 \left\{ \int_0^{x_s} \left[ f_{\rho1} f_{A1} (V_a)^2 + \frac{f_{\rho1} f_{I1}}{S_{01}^2} (\Psi_a)^2 \right] dx + \right. \\
& + C_\rho C_A \int_{x_s}^1 \left[ f_{\rho2} f_{A2} (V_a)^2 + \frac{f_{\rho2} f_{I2}}{S_{02}^2} (\Psi_a)^2 \right] dx + M \left[ (V_a|_{x=x_m})^2 + c_m^2 (\Psi_a|_{x=x_m})^2 \right] \left. \right\} \quad (8.6)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}}, \quad S_{01} = L \sqrt{\frac{A_{01}}{I_{01}}}, \quad S_{02} = L \sqrt{\frac{A_{02}}{I_{02}}}, \quad \lambda = \frac{2(1+\mu)}{\kappa}, \quad M = \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L}, \quad c_m = \frac{r_g}{L} \\
C_E = \frac{E_{02}}{E_{01}}, \quad C_\rho = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}, \quad C_A = \frac{A_{02}}{A_{01}}, \quad C_I = \frac{I_{02}}{I_{01}}, \quad \Psi_a' = \frac{d\Psi_a}{dx}, \quad V_a' = \frac{dV_a}{dx}
\end{aligned}$$

Siguiendo con el método de Rayleigh-Ritz, el siguiente paso es minimizar a la Ec. (8.6) respecto a cada constante arbitraria  $C_i$  y  $D_j$  (Ecs. (7.3)). Lo que da origen a un sistema de ecuaciones lineales, de forma análoga al mostrado en la Ec. (7.16). Sea el determinante de la matriz global  $\mathbf{R}_G$ , la ecuación de los coeficientes de frecuencia, puede expresarse como:

$$|\mathbf{R}_G| = |\mathbf{K}_G - \Omega^2 \mathbf{M}_G| = 0 \quad (8.7)$$

donde las matrices de rigidez  $\mathbf{K}_G$  y de masa  $\mathbf{M}_G$  globales. El subíndice G sirve para diferenciar las matrices de la viga de un tramo con las de dos tramos.

Seguidamente, se presentan las formas que adoptan los elementos  $k_{ij}$  y  $m_{ij}$ , que componen las matrices rigidez  $\mathbf{K}_G$  y de masa  $\mathbf{M}_G$  globales, respectivamente.

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
k_{ii} = & \int_0^{x_s} \left( \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} p_i' p_i' \right) dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left( \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} p_i' p_i' \right) dx \\
k_{ij} = & - \int_0^{x_s} \left( \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} p_i' q_j \right) dx - C_E C_I \int_{x_s}^1 \left( \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} p_i' q_j \right) dx \\
k_{ji} = & - \int_0^{x_s} \left( \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} q_j p_i' \right) dx - C_E C_I \int_{x_s}^1 \left( \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} q_j p_i' \right) dx \\
k_{jj} = & \int_0^{x_s} \left( f_{E1} f_{I1} q_j' q_j' + \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} q_j q_j \right) dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left( f_{E2} f_{I2} q_j' q_j' + \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} q_j q_j \right) dx
\end{aligned} \quad (8.8)$$

con  $p_i(x)$ ,  $p_j(x)$ ,  $q_i(x)$  y  $q_j(x)$  (Ecs. (7.3)) son funciones coordenadas que deben satisfacer, al menos, las condiciones de borde esenciales.

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \int_0^{x_S} (f_{\rho 1} f_{A1} p_i p_i) dx + C_{\rho} C_A \int_{x_S}^1 (f_{\rho 2} f_{A2} p_i p_i) dx + M p_i(x_m) p_i(x_m) \\ m_{ij} &= 0 \\ m_{ji} &= 0 \\ m_{jj} &= \frac{1}{S_{01}^2} \int_0^{x_S} (f_{\rho 1} f_{I1} q_j q_j) dx + \frac{C_{\rho} C_A}{S_{02}^2} \int_{x_S}^1 (f_{\rho 2} f_{I2} p_i p_i) dx + M c_m^2 q_j(x_m) q_j(x_m) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Vale aclarar que se adopta  $p_i(x) = p_j(x)$  y  $q_i(x) = q_j(x)$ , el valor del subíndice de  $i$  y  $j$  índice indica la posición del elemento a considerar en cada matriz global.

Finalmente, el problema de autovalores puede expresarse como:

$$|\mathbf{K}_G \mathbf{M}_G^{-1} - \Omega^2 \mathbf{I}| = |\mathbf{B}_G - \zeta \mathbf{I}| = 0 \quad (8.10)$$

con  $\zeta = \Omega^2$  cómo los autovalores de la matriz  $\mathbf{B}_G$  e  $\mathbf{I}$  la matriz identidad.

Para considerar las condiciones de borde (C.B.): E (Empotrado), A (Apoyado) y L (Libre); el método requiere elegir una función coordenada que satisfaga al menos las condiciones de borde esenciales. Al ser dos variables, estas funciones no serán necesariamente iguales. Por lo tanto, no es tan fácil deducir un polinomio que cumpla las condiciones de bordes esenciales y naturales simultáneamente, como en el capítulo 5 para la viga Bernoulli-Euler.

La [Tabla 8.1](#) presenta los polinomios elegidos, Ecs. (7.3), (7.4) y (7.5), para representar las distintas combinaciones de condiciones de borde clásicas ([Quintana y Grossi, 2010](#)).

C.B.	E-L	E-E	E-A	A-A
$p_i(x)$	$x^i$	$(x-1)x^i$	$(x-1)x^i$	$(x-1)x^i$
$q_j(x)$	$x^j$	$(x-1)x^j$	$x^j$	$x^{j-1}$

Tabla 8.1: Polinomios para distintas combinaciones de condiciones de borde clásicas.

#### 8.4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)

Como se ha presentado en el capítulo 4, los coeficientes de frecuencia naturales resultan de resolver las ecuaciones análogas de cuadratura diferencial del sistema de ecuaciones gobernantes del problema (Ecs. (8.10) y (8.11)). Entonces, para implementar el método en el estudio de las vibraciones transversales libres de la viga AFG, se parte del sistema de ecuaciones diferenciales que brinda a la teoría de vigas de Timoshenko ([Banerjee, 2001](#)):

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \kappa G(\bar{x}) A(\bar{x}) \left( \frac{\partial v(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} - \psi(\bar{x}, t) \right) \right] - \rho(\bar{x}) A(\bar{x}) \frac{\partial^2 v(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ E(\bar{x}) I(\bar{x}) \frac{\partial \psi(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right] + \kappa G(\bar{x}) A(\bar{x}) \left( \frac{\partial v(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} - \psi(\bar{x}, t) \right) - \rho(\bar{x}) I(\bar{x}) \frac{\partial^2 \psi(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.12)$$

Siendo  $v(\bar{x}, t)$  el desplazamiento vertical de los puntos de la superficie media de la viga en la dirección del eje  $\bar{y}$  y  $\psi(\bar{x}, t)$  el giro normal de la sección transversal durante la deformación.

Debido a que se considera una viga de dos tramos, resulta conveniente adimensionalizar, localmente, a la coordenada espacial y a las amplitudes del desplazamiento y del giro:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 / L_1, \quad V_1 = \bar{V}_1 / L_1, \quad \Psi_1 = \bar{\Psi}_1 & \text{Tramo 1} \\ x_2 &= \bar{x}_2 / L_2, \quad V_2 = \bar{V}_2 / L_2, \quad \Psi_2 = \bar{\Psi}_2 & \text{Tramo 2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Seguidamente, se determinan las ecuaciones gobernantes para cada tramo.

❖ La ecuación gobernante (Ec. (8.11)) en el Tramo 1:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left[ \kappa G_1(\bar{x}) A_1(\bar{x}) \left( \frac{\partial v_1(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_1} - \psi_1(\bar{x}, t) \right) \right] - \rho_1(\bar{x}) A_1(\bar{x}) \frac{\partial^2 v_1(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.14)$$

Reemplazando las expresiones del desplazamiento y del giro (Ecs. (7.1)), junto con la adimensionalización local de la Ec. (8.13) en la Ec. (8.14), entonces:

$$\frac{d}{L_1 dx_1} \left[ \frac{\kappa E_1(x) A_1(x)}{2(1+\mu)} \left( \frac{L_1 d(V_1 \cos(\omega t))}{L_1 dx_1} - \bar{\Psi}_1 \cos(\omega t) \right) \right] - \rho_1(x) A_1(x) \frac{L_1 d^2(V_1 \cos(\omega t))}{dt^2} = 0, \quad (8.15)$$

introduciendo las expresiones de las Ecs. (5.4) y (8.1), adimensionalizadas para el tramo  $k=1$ :

$$\left\{ \frac{E_{01} A_{01}}{\lambda L_1} \left[ f_{E1} f_{A1} (V_1' - \Psi_1) \right]' + \rho_{01} A_{01} f_{\rho 1} f_{A1} \omega^2 L_1 V_1 \right\} \cos(\omega t) = 0 \quad \text{con} \quad f_j' = \frac{df_j}{dx} \quad (8.16)$$

y trabajando algebraicamente, se llega a la expresión:

$$\frac{S_{01}^2}{\lambda} \left( \frac{L}{L_1} \right)^2 \left[ \frac{f_{E1}' f_{A1} + f_{E1} f_{A1}'}{f_{\rho 1} f_{A1}} (V_1' - \Psi_1) + \frac{f_{E1}}{f_{\rho 1}} (V_1'' - \Psi_1') \right] + \Omega^2 V_1 = 0 \quad (8.17)$$

De manera análoga, se obtienen las demás ecuaciones, con  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{(\rho_{01} A_{01}) / (E_{01} I_{01})}$ .

❖ La ecuación gobernante (Ec. (8.11)) en el Tramo 2:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left[ \kappa G_2(\bar{x}) A_2(\bar{x}) \left( \frac{\partial v_2(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_2} - \psi_2(\bar{x}, t) \right) \right] - \rho_2(\bar{x}) A_2(\bar{x}) \frac{\partial^2 v_2(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.18)$$

Se obtiene:

$$\frac{S_{01}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \left( \frac{L}{L_2} \right)^2 \left[ \frac{f_{E2}' f_{A2} + f_{E2} f_{A2}'}{f_{\rho 2} f_{A2}} (V_2' - \Psi_2) + \frac{f_{E2}}{f_{\rho 2}} (V_2'' - \Psi_2') \right] + \Omega^2 V_2 = 0 \quad (8.19)$$

❖ La ecuación gobernante (Ec. (8.12)) en el Tramo 1:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left[ E_1(\bar{x}) I_1(\bar{x}) \frac{\partial \psi_1(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_1} \right] + \kappa G_1(\bar{x}) A_1(\bar{x}) \left( \frac{\partial v_1(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_1} - \psi_1(\bar{x}, t) \right) - \rho_1(\bar{x}) I_1(\bar{x}) \frac{\partial^2 \psi_1(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.20)$$

Se obtiene:

$$\frac{S_{01}^2}{f_{\rho 1} f_{I1}} \left( \frac{L}{L_1} \right)^2 \left[ (f_{E1}' f_{I1} + f_{E1} f_{I1}') \Psi_1' + f_{E1} f_{I1} \Psi_1'' \right] + \frac{S_{01}^4}{\lambda} \frac{f_{E1} f_{A1}}{f_{\rho 1} f_{I1}} (V_1' - \Psi_1) + \Omega^2 \Psi_1 = 0 \quad (8.21)$$

❖ La ecuación gobernante (Ec. (8.12)) en el Tramo 2:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left[ E_2(\bar{x}) I_2(\bar{x}) \frac{\partial \psi_2(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_2} \right] + \kappa G_2(\bar{x}) A_2(\bar{x}) \left( \frac{\partial v_2(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_2} - \psi_2(\bar{x}, t) \right) - \rho_2(\bar{x}) I_2(\bar{x}) \frac{\partial^2 \psi_2(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.22)$$

Se obtiene:

$$S_{01}^2 \frac{C_E}{C_\rho} \left( \frac{L}{L_2} \right)^2 \left[ \frac{f_{E2}' f_{I2} + f_{E2} f_{I2}'}{f_{\rho 2} f_{I2}} \Psi_2' + \frac{f_{E2}}{f_{\rho 2}} \Psi_2'' \right] + \frac{S_{01}^2 S_{02}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \frac{f_{E2} f_{A2}}{f_{\rho 2} f_{I2}} (V_2' - \Psi_2) + \Omega^2 \Psi_2 = 0 \quad (8.23)$$

A continuación, se definen los coeficientes de forma:

$$v_{1k} = \frac{f_{Ek}' f_{Ak} + f_{Ek} f_{Ak}'}{f_{\rho k} f_{Ak}}; v_{2k} = \frac{f_{Ek}}{f_{\rho k}}; v_{3k} = \frac{f_{Ek}' f_{Ik} + f_{Ek} f_{Ik}'}{f_{\rho k} f_{Ik}}; v_{4k} = \frac{f_{Ek} f_{Ak}}{f_{\rho k} f_{Ik}} \text{ con } k=1,2. \quad (8.24)$$

Con la finalidad de obtener las ecuaciones gobernantes análogas de cuadratura, la viga AFG es discretizada en una grilla de  $N_k$  nodos de prueba. Se adopta para distribución de los nodos el mallado irregular propuesto por Chebyshev–Gauss–Lobato (Shu y Chen, 1999), Ec. (5.18).

Siguiendo las reglas de la cuadratura (Bert y Malik, 1997), la derivada de orden  $(q)$  del desplazamiento  $V$  y del giro  $\Psi$  para un punto de la grilla  $i$  en el tramo  $k$ -ésimo, puede expresarse como:

$$\left. \frac{d^q V_k}{dx^q} \right|_{x=x_{ik}} = \sum_{j=1}^{N_k} B_{ijk}^{(q)} V_{jk}, \quad \left. \frac{d^q \Psi_k}{dx^q} \right|_{x=x_{ik}} = \sum_{j=1}^{N_k} B_{ijk}^{(q)} \Psi_{jk} \text{ con } k=1,2; \quad (8.25)$$

donde  $V_{jk}$  y  $\Psi_{jk}$  son el desplazamiento y el giro del nodo  $j$  en el tramo  $k$ -ésimo, respectivamente. Los coeficientes de ponderación  $B_{ijk}^{(q)}$ , se obtienen a través de las funciones de interpolación de Lagrange (Karami et al., 2003), dadas por las Ecs. (5.20), (5.21) y (5.22).

Luego, aplicando la regla definida en las Ecs. (8.25) a las Ecs. (8.17), (8.19), (8.21) y (8.23); y utilizando los coeficientes de forma de definidos en la Ec. (8.24), se obtiene la ecuación gobernante análoga de cuadratura, la cual puede ser expresada en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{14} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{42} & \Lambda_{43} & \Lambda_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{j1} \\ V_{j2} \\ \Psi_{j1} \\ \Psi_{j2} \end{pmatrix} = \Omega^2 \begin{pmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \\ \Psi_{i1} \\ \Psi_{i2} \end{pmatrix} \quad \text{con } i, j = 2, 3, \dots, N_k - 1 \quad \text{y } k = 1, 2. \quad (8.26)$$

donde sus componentes son:

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= -\frac{S_{01}^2}{\lambda} \left( \frac{L}{L_1} \right)^2 \left[ \nu_{11}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} + \nu_{21}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(2)} \right], \\ \Lambda_{13} &= \frac{S_{01}^2}{\lambda} \left( \frac{L}{L_1} \right)^2 \left[ \nu_{11}(x_{i1}) + \nu_{21}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \right], \\ \Lambda_{22} &= -\frac{S_{01}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \left( \frac{L}{L_2} \right)^2 \left[ \nu_{12}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} + \nu_{22}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(2)} \right], \\ \Lambda_{24} &= \frac{S_{01}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} \left( \frac{L}{L_2} \right)^2 \left[ \nu_{12}(x_{i2}) + \nu_{22}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} \right], \\ \Lambda_{31} &= -\frac{S_{01}^4}{\lambda} \left[ \nu_{41}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \right], \\ \Lambda_{33} &= -S_{01}^2 \left( \frac{L}{L_1} \right)^2 \left[ \nu_{31}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} + \nu_{21}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(2)} \right] + \frac{S_{01}^4}{\lambda} [\nu_{41}(x_{i1})], \\ \Lambda_{42} &= -\frac{S_{01}^2 S_{02}^2}{\lambda} \left[ \nu_{42}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} \right], \\ \Lambda_{44} &= -S_{01}^2 \left( \frac{L}{L_2} \right)^2 \left[ \nu_{32}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} + \nu_{22}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(2)} \right] + \frac{S_{01}^2 S_{02}^2}{\lambda} \frac{C_E}{C_\rho} [\nu_{42}(x_{i2})], \\ \Lambda_{12} &= \Lambda_{14} = \Lambda_{21} = \Lambda_{23} = \Lambda_{32} = \Lambda_{34} = \Lambda_{41} = \Lambda_{43} = 0 \end{aligned} \quad (8.27)$$

Para constituir el sistema de ecuaciones del problema es necesario, además, obtener las condiciones de continuidad y de borde análogas de cuadratura. Las condiciones de continuidad se deben cumplir para asegurar integridad del sistema. Estas implican que se deba satisfacer la compatibilidad entre los tramos 1 y 2, coordenada  $x = x_s \left( x_2|_{i=N_1} = x_1|_{i=1} \right)$ , de los desplazamientos y giros; y, además, de los esfuerzos internos de corte y momento flector (Ver Anexo 1).

❖ Compatibilidad del desplazamiento:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 \quad (8.28)$$

Considerando las adimensionalizaciones de la Ec. (8.13), se llega a:



$$L_1 V_1 = L_2 V_2 \quad (8.29)$$

❖ Compatibilidad del giro :

$$\bar{\Psi}_1 = \bar{\Psi}_2 \quad (8.30)$$

Idem a la Ec. (8.28), se considera las adimensionalizaciones de la Ec. (8.13), entonces:

$$\Psi_1 = \Psi_2 \quad (8.31)$$

❖ Equilibrio de los esfuerzos de corte:

$$\kappa G_1(\bar{x}) A_1(\bar{x}) (\bar{V}'_1 - \bar{\Psi}_1) = \kappa G_2(\bar{x}) A_2(\bar{x}) (\bar{V}'_2 - \bar{\Psi}_2) + \omega^2 m \bar{V}_1 \quad (8.32)$$

Se reemplazan las Ecs. (8.13) en la Ec. (8.32), y considerando material es isotrópico (Ec. (8.2)):

$$\frac{\kappa E_1(x) A_1(x)}{2(1+\mu)} (V'_1 - \Psi_1) - \frac{\kappa E_2(x) A_2(x)}{2(1+\mu)} (V'_2 - \Psi_2) = \omega^2 m L_1 V_1 \quad (8.33)$$

A continuación, se introducen las Ecs. (5.4) y (8.1) en la Ec. (8.33):

$$\frac{E_{01} A_{01}}{\lambda} f_{E1} f_{A1} (V'_1 - \Psi_1) - \frac{E_{02} A_{02}}{\lambda} f_{E2} f_{A2} (V'_2 - \Psi_2) = \omega^2 m L_1 V_1 \quad (8.34)$$

Multiplicando y dividiendo por  $\rho_{01} A_{01} L^4 E_{01} I_{01}$  al segundo miembro, y agrupando:

$$\frac{E_{01} A_{01}}{\lambda} \frac{L^3}{E_{01} I_{01}} f_{E1} f_{A1} (V'_1 - \Psi_1) - \frac{E_{02} A_{02}}{\lambda} \frac{L^3}{E_{01} I_{01}} \frac{A_{01}}{A_{02}} f_{E2} f_{A2} (V'_2 - \Psi_2) = \frac{\omega^2 \rho_{01} A_{01} L^4}{E_{01} I_{01}} \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L} V_1 \quad (8.35)$$

Considerando, además, las expresiones definidas en la Ec. (8.6) se llega a la expresión:

$$\frac{S_{01}^2}{M \lambda} \frac{L}{L_1} \left[ f_{E1} f_{A1} (V'_1 - \Psi_1) - C_E C_A f_{E2} f_{A2} (V'_2 - \Psi_2) \right] = \Omega^2 V_1 \quad (8.36)$$

La cual se transforma de acuerdo con las reglas de la cuadratura (Ec. (8.25)) a:

$$\frac{S_{01}^2}{M \lambda} \frac{L}{L_1} \left[ \left( v_{51}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{i1} - \Psi_{i1} \right) \right]_{i=N_1} - C_E C_A \left( v_{52}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} V_{i2} - \Psi_{i2} \right) \Big|_{i=1} = \Omega^2 V_{i1} \Big|_{i=N_1} \quad (8.37)$$

con  $v_{5k}(x_{ik}) = f_{Ek} f_{Ak}$ ,  $k=1,2$ .

❖ Equilibrio de los momentos flectores:

$$E_1(\bar{x}) I_1(\bar{x}) \bar{\Psi}'_1 = E_2(\bar{x}) I_2(\bar{x}) \bar{\Psi}'_2 + \omega^2 m r_g^2 \bar{\Psi}_1 \quad (8.38)$$

Reemplazando las adimensionalizaciones de la Ec. (8.13) e introduciendo las Ecs. (5.4) y (8.1), en la Ec. (8.38) se obtiene:

$$E_{01} I_{01} f_{E1} f_{I1} \frac{\Psi_1'}{L_1} - E_{02} I_{02} f_{E2} f_{I2} \frac{\Psi_2'}{L_2} = \omega^2 m r_g^2 \Psi_1. \quad (8.39)$$

Multiplicando y dividiendo por  $\rho_{01} A_{01} L^4$  al segundo miembro, y agrupando:

$$\frac{f_{E1} f_{I1}}{L_1} \Psi_1' - \frac{E_{02} I_{02}}{E_{01} I_{01}} \frac{f_{E2} f_{I2}}{L_2} \Psi_2' = \frac{\omega^2 \rho_{01} A_{01} L^4}{E_{01} I_{01}} \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L} \frac{r_g^2}{L^2} \frac{1}{L} \Psi_1. \quad (8.40)$$

Si se continúa trabajando, considerando las expresiones de la Ec. (8.6), se obtiene:

$$\frac{L}{M c_m^2} \left[ \frac{f_{E1} f_{I1}}{L_1} \Psi_1' - C_E C_I \frac{f_{E2} f_{I2}}{L_2} \Psi_2' \right] = \Omega^2 \Psi_1, \quad (8.41)$$

que de acuerdo con las reglas de la cuadratura se transforma (Ec. (8.25)) a:

$$\frac{L}{M c_m^2} \left[ \frac{1}{L_1} \left( v_{61}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} \right) \right]_{i=N_1} - \frac{C_E C_I}{L_2} \left( v_{62}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2} \right) \right]_{i=1} = \Omega^2 \Psi_{i1} \Big|_{i=N_1}. \quad (8.42)$$

con  $v_{6k}(x_{ik}) = f_{Ek} f_{Ik}$ ,  $k=1,2$ .

Para darle más generalidades al modelo, se ha presentado el caso en que en la continuidad de los tramos existe una masa puntual adosada. Pero, para el caso de que no haya masa, basta sólo con igualar a cero las expresiones encerradas entre corchetes en las Ecs. (8.37) y (8.42).

Luego, las expresiones de las condiciones de borde (CB) clásicas (ver Anexo 1) se presentan en la Tabla 8.2, en la forma análoga de cuadratura.

CB	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
E	$V_{i1} \Big _{i=1} = 0$	$V_{i2} \Big _{i=N_2} = 0$
	$\Psi_{i1} \Big _{i=1} = 0$	$\Psi_{i2} \Big _{i=N_2} = 0$
L	$\left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{i1} - \Psi_{i1} \right] \Big _{i=1} = 0$	$\left[ \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} V_{i2} - \Psi_{i2} \right] \Big _{i=N_2} = 0$
	$\left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} \right] \Big _{i=1} = 0$	$\left[ \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2} \right] \Big _{i=N_2} = 0$
A	$V_{i1} \Big _{i=1} = 0$	$V_{i2} \Big _{i=N_2} = 0$
	$\left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} \right] \Big _{i=1} = 0$	$\left[ \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2} \right] \Big _{i=N_2} = 0$

Tabla 8.2: Expresiones para las condiciones de borde clásicas según GDQM.

Para el caso de que la masa esté adosada en alguno de los extremos, de la viga de dos tramos, las condiciones de borde son naturales son (ver Anexo 1):

En  $\bar{x}_1 = 0$ :

$$\kappa G_1(\bar{x}) A_1(\bar{x}) \left( \frac{\partial v_1(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_1} - \psi_1(\bar{x}, t) \right) = m \frac{\partial^2 v_1(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad ; \quad E_1(\bar{x}) I_1(\bar{x}) \frac{\partial \psi_1(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_1} = J_m \frac{\partial^2 \psi_1(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad (8.43)$$

En  $\bar{x}_2 = L_2$ :

$$\kappa G_2(\bar{x}) A_2(\bar{x}) \left( \frac{\partial v_2(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_2} - \psi_2(\bar{x}, t) \right) = -m \frac{\partial^2 v_2(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad ; \quad E_2(\bar{x}) I_2(\bar{x}) \frac{\partial \psi_2(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}_2} = -J_m \frac{\partial^2 \psi_2(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad (8.44)$$

donde  $J_m = m r_g^2$  es el momento de inercia de la masa  $m$ .

Seguidamente, aplicando el procedimiento desarrollado para las condiciones de compatibilidad (equilibrio de esfuerzos internos), se deducen a modo de ejemplo las expresiones para el extremo derecho ( $\bar{x}_2 = L_2$ ), del tramo 2.

❖ Esfuerzo de Corte (Ec. (8.43)) en  $\bar{x}_2 = L_2$ :

$$\kappa G_2(x) A_2(x) \left( \frac{L_2 \partial (V_2 \cos(\omega t))}{L_2 \partial x_2} - \Psi_2 \cos(\omega t) \right) = -m \frac{L_2 \partial^2 (V_2 \cos(\omega t))}{\partial t^2} \quad (8.45)$$

$$\frac{\kappa E_{02} A_{02}}{2(1+\mu)} f_{E2} f_{A2} (V_2' - \Psi_2) = m \omega^2 L_2 V_2 \quad (8.46)$$

$$\frac{E_{02} A_{02}}{\lambda} f_{E2} f_{A2} (V_2' - \Psi_2) = m \omega^2 L_2 V_2 \times \frac{\rho_{01} A_{01} L^4 E_{01} I_{01}}{\rho_{01} A_{01} L^4 E_{01} I_{01}} \quad (8.47)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{E_{02}}{E_{01}} \frac{A_{02}}{I_{01}} \frac{L^3}{L_2} f_{E2} f_{A2} (V_2' - \Psi_2) = \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L} \frac{\omega^2 \rho_{01} A_{01} L^4}{E_{01} I_{01}} V_2 \quad (8.48)$$

$$\frac{1}{\lambda} C_E \frac{A_{02}}{I_{01}} \frac{A_{01}}{A_{01}} L^2 \frac{L}{L_2} f_{E2} f_{A2} (V_2' - \Psi_2) = M \Omega^2 V_2 \quad (8.49)$$

Se llega finalmente a:

$$\frac{S_{01}^2}{M \lambda} C_E C_A \frac{L}{L_2} f_{E2} f_{A2} (V_2' - \Psi_2) = \Omega^2 V_2 \quad (8.50)$$

❖ Momento flector (Ec. (8.43)) en  $\bar{x}_2 = L_2$ :

$$E_2(x) I_2(x) \frac{\partial (\Psi_2 \cos(\omega t))}{L_2 \partial x_2} = -J_m \frac{\partial^2 (\Psi_2 \cos(\omega t))}{\partial t^2} \quad (8.51)$$

$$\frac{E_{02} I_{02}}{L_2} f_{E2} f_{I2} \Psi_2' = m r_g^2 \omega^2 \Psi_2 \quad (8.52)$$

$$\frac{E_{02} I_{02}}{L_2} f_{E2} f_{I2} \Psi_2' = m r_g^2 \omega^2 \Psi_2 \times \frac{\rho_{01} A_{01} L^4 E_{01} I_{01}}{\rho_{01} A_{01} L^4 E_{01} I_{01}} \quad (8.53)$$

$$\frac{E_{02} I_{02}}{E_{01} I_{01}} \frac{L}{L_2} f_{E2} f_{I2} \Psi_2' = \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L} \frac{r_g^2}{L^2} \frac{\omega^2 \rho_{01} A_{01} L^4}{E_{01} I_{01}} \Psi_2 \quad (8.54)$$

Se llega finalmente a:

$$\frac{C_E C_I}{M c_m^2} \frac{L}{L_2} f_{E2} f_{I2} \Psi_2' = \Omega^2 \Psi_2 \quad (8.55)$$

De manera análoga, se procede para deducir las expresiones para el extremo izquierdo.

En la [Tabla 8.3](#) se presentan, para ambos extremos, las condiciones de bordes análogas de cuadratura expresadas según las reglas de [Bert y Malik \(1997\)](#) (Ec. (8.25) y adimensionalizadas de acuerdo a la Ec. (8.13):

Masa $m$ en	$x_1 = 0$	$-\frac{S_{01}^2}{M \lambda} \frac{L}{L_1} \left[ \nu_{51}(x_{i1}) \left( \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{i1} - \Psi_{i1} \right) \right]_{i=1} = \Omega^2 V_{i1}  _{i=1}$
		$-\frac{1}{M c_m^2} \frac{L}{L_1} \left[ \nu_{61}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} \right]_{i=1} = \Omega^2 \Psi_{i1}  _{i=1}$
	$x_2 = 1$	$\frac{S_{01}^2 C_E C_A}{M \lambda} \frac{L}{L_2} \left[ \nu_{52}(x_{i2}) \left( \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} V_{i2} - \Psi_{i2} \right) \right]_{i=N_2} = \Omega^2 V_{i2}  _{i=N_2}$
		$\frac{C_E C_I}{M c_m^2} \frac{L}{L_2} \left[ \nu_{62}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2} \right]_{i=N_2} = \Omega^2 \Psi_{i2}  _{i=N_2}$

Tabla 8.3: Condiciones de borde análogas de cuadratura para cuando existe una masa puntual adosada en uno de los dos extremos de la viga AFG.

### 8.4.3 Método de Elementos Finitos (FEM)

El elemento viga a utilizar es denominado cúbico-cuadrático de dos nodos ([Rossi, 2007](#)), debido al orden de los polinomios con que se aproximan las variables  $v$  y  $\psi$ . Cada elemento es de longitud  $\ell = 2a$  y posee un nodo en cada extremo, con dos grados de libertad (GL), debido a las variables mencionadas; para el nodo 1 ( $V_1$  y  $\Psi_1$ ) y para el nodo 2 ( $V_2$  y  $\Psi_2$ ).

En la [Figura 8.2](#) se presenta el esquema del elemento finito a emplear para el análisis.

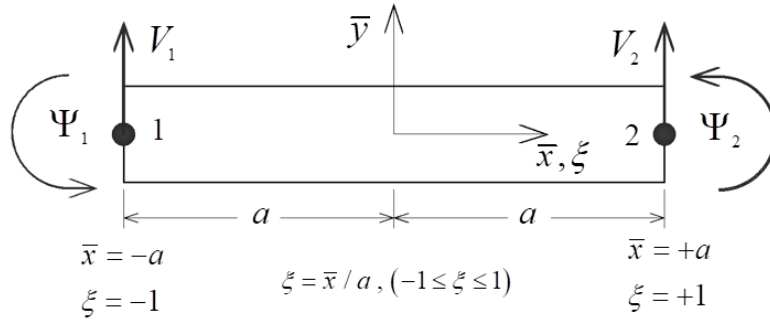


Figura 8.2: Esquema del elemento finito Timoshenko de 2 nodos.

Teniendo en cuenta que las funciones de forma permiten representar las elásticas estáticas de una viga sin carga en el tramo, tal como se comprobó para el elemento viga Bernoulli-Euler de dos nodos (EB2N), surge la idea de imponer esta propiedad para desarrollar el elemento finito de viga Timoshenko.

Haciendo nulas las derivadas temporales  $\ddot{v} = 0$  y  $\ddot{\psi} = 0$ , en las ecuaciones de movimiento, Ecs. (8.11) y (8.12), y considerando una viga de un tramo de sección transversal uniforme y de material homogéneo, se obtienen las ecuaciones diferenciales de equilibrio estático para la teoría viga Timoshenko sin carga:

$$\kappa GA \left( \frac{d^2 \bar{V}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - \frac{d\bar{\Psi}(\bar{x})}{d\bar{x}} \right) = 0 \quad (8.56)$$

$$EI \frac{d^2 \bar{\Psi}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + \kappa GA \left( \frac{d\bar{V}(\bar{x})}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}(\bar{x}) \right) = 0. \quad (8.57)$$

Luego, derivando la Ec. (8.57) respecto a la variable  $\bar{x}$  y restando la Ec. (8.56), resulta:

$$\frac{d^3 \bar{\Psi}(\bar{x})}{d\bar{x}^3} = 0. \quad (8.58)$$

Y derivando dos veces la Ec. (8.56) respecto a  $\bar{x}$  y reemplazando la Ec. (8.58), se obtiene:

$$\frac{d^4 \bar{V}(\bar{x})}{d\bar{x}^4} = 0. \quad (8.59)$$

Antes de obtener las soluciones de las Ecs. (8.58) y (8.59), resulta necesario adimensionalizar la coordenada espacial  $\bar{x}$  y las amplitudes de desplazamiento  $\bar{V}(\bar{x})$  y giro  $\bar{\Psi}(\bar{x})$ , respecto a la semi-longitud  $a$  del elemento:

$$\xi = \frac{\bar{x}}{a} ; \quad V(\xi) = \frac{\bar{V}(\bar{x})}{a} ; \quad \Psi(\xi) = \bar{\Psi}(\bar{x}). \quad (8.60)$$

Luego, las soluciones de la Ecs. (8.58) y (8.59), son los polinomios completos:

$$V(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3. \quad (8.61)$$

$$\Psi(\xi) = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2. \quad (8.62)$$

Introduciendo estos polinomios en las Ecs. (8.56) y (8.57), previamente adimensionalizadas según la Ec. (8.60), se llega a:

$$(2a_2 + 6a_3\xi) - (b_1 + 2b_2\xi) = 0 \quad (8.63)$$

$$\frac{EI}{a^2}(2b_2) + \kappa GA \left[ (a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2) - (b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2) \right] = 0. \quad (8.64)$$

Cuyas ecuaciones (Ecs. (8.63) y (8.64)) deben satisfacerse para todo punto del elemento. Entonces, trabajando algebraicamente con las mismas se obtiene:

$$b_0 = a_1 + 2\phi a_3; \quad b_1 = 2a_2; \quad b_2 = 3a_3 \quad \text{con} \quad \phi = \frac{3EI}{\kappa GA a^2}. \quad (8.65)$$

Por otro lado, derivando la Ec. (8.61) respecto a  $\xi$  y restando la Ec. (8.62), reemplazando previamente la Ec. (8.65) en ambas, se obtiene la expresión de la distorsión  $\gamma$  (Ec. (1.7)):

$$\gamma(\xi) = \frac{dV(\xi)}{d\xi} - \Psi(\xi) = -2\phi a_3. \quad (8.66)$$

Luego, los cuatro grados de libertad del elemento tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ V_2 &= V(+1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \Psi_1 &= \Psi(-1) = a_1 + 2\phi a_3 - 2a_2 + 3a_3 \\ \Psi_2 &= \Psi(+1) = a_1 + 2\phi a_3 + 2a_2 + 3a_3 \end{aligned} \quad (8.67)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales de la Ec. (8.67), se determinan los coeficientes  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$  en función de los grados de libertad  $V_1, \Psi_1, V_2$  y  $\Psi_2$ . Posteriormente, reemplazando esas expresiones en la Ecs. (8.61) y (8.62), y reagrupando se obtiene:

$$V(\xi) = \begin{bmatrix} F_{v1}(\xi) & F_{v2}(\xi) & F_{v3}(\xi) & F_{v4}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \Psi_1 \\ V_2 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} = [F_v(\xi)] \{\delta_e\} \quad (8.68)$$

$$\Psi(\xi) = \begin{bmatrix} F_{\psi1}(\xi) & F_{\psi2}(\xi) & F_{\psi3}(\xi) & F_{\psi4}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \Psi_1 \\ V_2 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} = [F_\psi(\xi)] \{\delta_e\}. \quad (8.69)$$

donde las ocho funciones de interpolación adoptan las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
F_{v1}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [2(1+\phi) - 3(1+2\phi)\xi + \xi^3] \\
F_{v2}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [1+\phi - \xi - (1+\phi)\xi^2 + \xi^3] \\
F_{v3}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [2(1+\phi) + 3(1+2\phi)\xi - \xi^3] \\
F_{v4}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [-1-\phi - \xi + (1+\phi)\xi^2 + \xi^3]
\end{aligned} \tag{8.70}$$

$$\begin{aligned}
F_{\psi1}(\xi) &= \frac{3}{4(1+\phi)} [-1 + \xi^2] \\
F_{\psi2}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [-1 + 2\phi - 2(1+\phi)\xi + 3\xi^2] \\
F_{\psi3}(\xi) &= \frac{3}{4(1+\phi)} [1 - \xi^2] = -F_{\psi1}(\xi) \\
F_{\psi4}(\xi) &= \frac{1}{4(1+\phi)} [-1 + 2\phi + 2(1+\phi)\xi + 3\xi^2]
\end{aligned} \tag{8.71}$$

para  $\xi = \bar{x}/a, (-1 \leq \xi \leq 1)$ . Y la distorsión  $\gamma$  (Ec. (1.7)) del elemento queda expresada como:

$$\gamma(\xi) = \frac{dV(\xi)}{d\xi} - \Psi(\xi) = \begin{bmatrix} F_{\gamma1}(\xi) & F_{\gamma2}(\xi) & F_{\gamma3}(\xi) & F_{\gamma4}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \Psi_1 \\ V_2 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} = [F_\gamma(\xi)] \{\delta_e\} \tag{8.72}$$

con  $F_{\gamma1} = -F_{\gamma3} = -\frac{\phi}{2(1+\phi)}$  ;  $F_{\gamma2} = F_{\gamma4} = F_{\gamma1}$

#### ❖ Matrices de los elementos

Seguidamente, se determinan las matrices de rigidez  $[k_e]$  y de masa  $[m_e]$  de los elementos. Para obtener la matriz de rigidez, es necesario considerar la energía de deformación del elemento. La misma se indica adimensionalizada respecto a la semi-longitud  $a$  :

$$U_e = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{E(\xi)I(\xi)}{a^2} (\Psi'(\xi))^2 a d\xi + \kappa \int_{-1}^1 G(\xi)A(\xi) (V'(\xi) - \Psi(\xi))^2 a d\xi \right\} \tag{8.73}$$

Luego, las funciones de giro  $\Psi(\xi)$  y distorsión  $\gamma(\xi)$ , son expresadas en términos de los vectores  $[F_\psi(\xi)]$  y  $[F_\gamma(\xi)]$ , respectivamente:

$$\begin{aligned}
(\Psi'(\xi))^2 &= \{\delta_e\}^t [F_\psi'(\xi)]^t [F_\psi'(\xi)] \{\delta_e\} \\
(V'(\xi) - \Psi(\xi))^2 &= (\gamma(\xi))^2 = \{\delta_e\}^t [F_\gamma(\xi)]^t [F_\gamma(\xi)] \{\delta_e\}
\end{aligned} \tag{8.74}$$

Reemplazando la Ec. (8.74) en la Ec. (8.73) se obtiene:

$$\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2} \left( \{\delta_e\}' \frac{1}{a} \int_{-1}^1 E(\xi) I(\xi) [F_\psi'(\xi)]' [F_\psi'(\xi)] d\xi \{\delta_e\} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \left( \{\delta_e\}' \frac{\kappa}{2(1+\mu)} a \int_{-1}^1 E(\xi) A(\xi) [F_\gamma(\xi)]' [F_\gamma(\xi)] d\xi \{\delta_e\} \right) \\
&= \frac{1}{2} \{\delta_e\}' [k_e] \{\delta_e\}
\end{aligned} \tag{8.75}$$

con

$$[k_e] = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 E(\xi) I(\xi) [F_\psi'(\xi)]' [F_\psi'(\xi)] d\xi + \frac{a}{\lambda} \int_{-1}^1 E(\xi) A(\xi) [F_\gamma(\xi)]' [F_\gamma(\xi)] d\xi \tag{8.76}$$

La matriz de masa del elemento se obtiene de considerar la energía cinética del mismo, la cual independizada del tiempo  $t$  y adimensionalizada respecto a la semi-longitud  $a$ , es:

$$T_e = \frac{1}{2} \omega^2 \left[ \int_{-1}^1 \rho(\xi) A(\xi) a^2 (V(\xi))^2 a d\xi + \int_{-1}^1 \rho(\xi) I(\xi) (\Psi(\xi))^2 a d\xi \right] \tag{8.77}$$

Luego, las funciones de desplazamiento  $V(\xi)$  y giro  $\Psi(\xi)$  son expresadas en términos de los vectores  $[F_v(\xi)]$  y  $[F_\psi(\xi)]$ , respectivamente:

$$(V(\xi))^2 = \{\delta_e\}' [F_v(\xi)]' [F_v(\xi)] \{\delta_e\} \quad \text{y} \quad (\Psi(\xi))^2 = \{\delta_e\}' [F_\psi(\xi)]' [F_\psi(\xi)] \{\delta_e\} \tag{8.78}$$

Reemplazando las Ecs. (8.78) en la Ec. (8.77), se obtiene:

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{1}{2} \omega^2 \left( \{\delta_e\}' a^3 \int_{-1}^1 \rho(\xi) A(\xi) [F_v(\xi)]' [F_v(\xi)] d\xi \{\delta_e\} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \omega^2 \left( \{\delta_e\}' a \int_{-1}^1 \rho(\xi) I(\xi) [F_\psi(\xi)]' [F_\psi(\xi)] d\xi \{\delta_e\} \right) \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 \{\delta_e\}' [m_e] \{\delta_e\}
\end{aligned} \tag{8.79}$$

con

$$[m_e] = a^3 \int_{-1}^1 \rho(\xi) A(\xi) [F_v(\xi)]' [F_v(\xi)] d\xi + a \int_{-1}^1 \rho(\xi) I(\xi) [F_\psi(\xi)]' [F_\psi(\xi)] d\xi \tag{8.80}$$

Debido a que se considera una viga AFG de sección variable, estas matrices irán cambiando, elemento a elemento, ya que las propiedades del material y las características geométricas poseen una ley de variación que depende de la coordenada  $x$ .

Recordando que el dominio de la viga se encuentra dividido en dos sub-dominios, de las Ecs. (8.76) y (8.80) se obtienen las matrices elementales  $[k_e]_k$  y  $[m_e]_k$  con  $k=1,2$ . Entonces:



$$[k_e]_1 = \frac{1}{a_1} \int_{-1}^1 E_1(\xi) I_1(\xi) [F_\psi'(\xi)]' [F_\psi'(\xi)] d\xi + \frac{a_1}{\lambda} \int_{-1}^1 E_1(\xi) A_1(\xi) [F_\gamma(\xi)]' [F_\gamma(\xi)] d\xi \quad (8.81)$$

$$[k_e]_2 = \frac{1}{a_2} \int_{-1}^1 E_2(\xi) I_2(\xi) [F_\psi'(\xi)]' [F_\psi'(\xi)] d\xi + \frac{a_2}{\lambda} \int_{-1}^1 E_2(\xi) A_2(\xi) [F_\gamma(\xi)]' [F_\gamma(\xi)] d\xi \quad (8.82)$$

$$[m_e]_1 = a_1^3 \int_{-1}^1 \rho_1(\xi) A_1(\xi) [F_v(\xi)]' [F_v(\xi)] d\xi + a_1 \int_{-1}^1 \rho_1(\xi) I_1(\xi) [F_\psi(\xi)]' [F_\psi(\xi)] d\xi \quad (8.83)$$

$$[m_e]_2 = a_2^3 \int_{-1}^1 \rho_2(\xi) A_2(\xi) [F_v(\xi)]' [F_v(\xi)] d\xi + a_2 \int_{-1}^1 \rho_2(\xi) I_2(\xi) [F_\psi(\xi)]' [F_\psi(\xi)] d\xi \quad (8.84)$$

Se opta por un mallado regular, es decir, que todos los elementos posean la misma longitud. Pero, al estar el dominio dividido en dos tramos, las respectivas semi-longitudes de los elementos serán idénticas únicamente cuando las longitudes de los tramos sean iguales. Expresado matemáticamente, las relaciones son:

$$a_1 = \frac{L_1}{2n_{e1}} ; a_2 = \frac{L_2}{2n_{e2}} \quad \text{con} \quad n_{e1} = n_{e2} \quad \text{y} \quad n_e = n_{e1} + n_{e2} \quad (8.85)$$

Luego, el coeficiente  $\phi$  definido en la Ec. (8.65), para cada tramo es:

$$\phi_1 = \frac{3E_{01}I_{01}}{\kappa G_{01}A_{01}a_1^2} ; \phi_2 = \frac{3E_{02}I_{02}}{\kappa G_{02}A_{02}a_2^2} . \quad (8.86)$$

El proceso de ensamblado es idéntico al de una viga de sección constante y de material uniforme. Al ensamblar las matrices elementales, Ecs. ((8.81), (8.82), (8.83) y (8.84)), para cada tramo se obtienen las matrices de rigidez ( $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}_2$ ) y de masa ( $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$ ), respectivamente. Luego, al ensamblar  $\mathbf{K}_1$  con  $\mathbf{K}_2$  y  $\mathbf{M}_1$  con  $\mathbf{M}_2$ , se llega a las matrices globales  $\mathbf{K}_G$  y  $\mathbf{M}_G$ ; con las que se construye el siguiente sistema de ecuaciones, en su forma matricial:

$$\{\mathbf{K}_G - \omega^2 \mathbf{M}_G\} \{\delta_e\} = \{0\} \quad (8.87)$$

La ecuación característica que proporciona los valores de las frecuencias naturales, resulta de aplicar la condición de no-trivialidad a la Ec. (8.87), es decir, calcular el determinante de la matriz  $\mathbf{R}_G$  e igualarlo a cero.

$$|\mathbf{R}_G| = |\mathbf{K}_G - \omega^2 \mathbf{M}_G| = 0 \quad (8.88)$$

Luego, para obtener los coeficientes de frecuencia naturales, se reemplazan las frecuencias

calculadas mediante la Ec. (8.88), en la siguiente expresión:

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}} . \quad (8.89)$$

Para contemplar las distintas condiciones de borde clásicas, tal como se mencionó en el capítulo 6, se eliminan las filas y columnas correspondientes, en las matrices globales de masa y de rigidez, de las condiciones esenciales (geométricas) conocidas.

Por otra parte, el modelo puede contemplar una masa puntual adosada a la viga. Al considerarse el efecto de inercia traslacional y rotacional de la misma, deberán sumarse dos términos de energía cinética (Ec. (7.13)) a la matriz de masa del elemento, definida en la Ec. (8.80), que lleve dicha masa. El algoritmo desarrollado, plantea ubicarla en el nodo derecho del elemento, es decir, en  $\xi = 1$ . Por lo tanto, los términos que se deben adicionar son:

$$m a^2 [F_v(1)]^t [F_v(1)] + m r_g^2 [F_\psi(1)]^t [F_\psi(1)] . \quad (8.90)$$

Se deben contemplar las siguientes situaciones, para la Ec. (8.90):

- ✓ Si la masa está en la continuidad  $a = a_1$ .
- ✓ Si la masa está en el extremo libre de la viga de 1 tramo  $a = a_1$ .
- ✓ Si la masa está en el extremo libre de la viga de 2 tramos  $a = a_2$ .

## 8.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Parte de los resultados que se presentan en el presente capítulo, forman parte del trabajo publicado por [Gilardi et al. \(2017\)](#).

### 8.5.1 Estudio de convergencia

En el Anexo 2, correspondiente al capítulo 7, se demuestra la convergencia del método de Rayleigh-Ritz, por lo que resta desarrollar el correspondiente análisis para GDQM y FEM.

En la bibliografía consultada del método de cuadratura diferencial, especificada en el capítulo 4, no está muy claro cómo se debe tratar matricialmente a una masa adosada en la viga. Entonces, con la finalidad de dar una idea clara al lector, análogamente a lo presentado en el capítulo 4, se desarrollarán dos modelos simples para entender el procedimiento. El primer modelo es una viga en voladizo de un tramo, con sección transversal uniforme, constituida por material homogéneo y sin masa adosada. Y el segundo modelo, similar al primero, considera adosada una masa puntual en el extremo libre de la viga.

Para las vigas AFG el procedimiento es equivalente. Se dificulta en que hay que introducir

los coeficientes de forma y aparecen más términos (por las derivadas de las variables  $v$  y  $\psi$ ). El problema es mucho más complejo cuando se adicionan tramos, modelo de la [Figura 8.1](#), ya que intervienen las condiciones de continuidad, se debe introducir la masa y hay que analizar las influencias de un tramo sobre otro, etc.

### 8.5.1.1 Viga cantiléver sin masa

En primer lugar, se implementan GDQM y FEM para analizar la vibración libre de una viga Timoshenko en voladizo, homogénea, uniforme, sin masa adosada y de un único tramo.

Se parte, entonces, para GDQM de las ecuaciones gobernantes (Ecs. (8.11) y (8.12)). Luego, trabajando algebraicamente con estas expresiones, se llega a las expresiones presentadas en las Ecs. (8.17) y (8.21), las cuales para la viga uniforme y homogénea adoptan la forma:

$$\frac{S_{01}^2}{\lambda} (V_1'' - \Psi_1') + \Omega^2 V_1 = 0 \quad (8.91)$$

$$S_{01}^2 \Psi_1'' + \frac{S_{01}^4}{\lambda} (V_1' - \Psi_1) + \Omega^2 \Psi_1 = 0. \quad (8.92)$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales análogas de cuadratura diferencial son:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} V_{j1} \\ \Psi_{j1} \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} V_{i1} \\ \Psi_{i1} \end{Bmatrix} \quad \text{con } i, j = 2, 3, \dots, N_1 - 1$$

donde: (8.93)

$$\Lambda_{11} = -\frac{S_{01}^2}{\lambda} \left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(2)} \right] \quad \Lambda_{12} = \frac{S_{01}^2}{\lambda} \left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \right] \quad \Lambda_{21} = -\frac{S_{01}^4}{\lambda} \left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \right] \quad \Lambda_{22} = \frac{S_{01}^4}{\lambda} - S_{01}^2 \left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(2)} \right]$$

Por otra parte, las condiciones de borde análogas de cuadratura son ([Tabla 8.2](#)):

$$x_1 = 0: V_{i1}|_{i=1} = 0, \Psi_{i1}|_{i=1} = 0 \quad x_1 = 1: \left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{i1} - \Psi_{i1} \right]_{i=N_1} = 0, \left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} \right]_{i=N_1} = 0. \quad (8.94)$$

Para hallar los primeros 5 coeficientes de frecuencia, la cantidad mínima de nodos requerida es  $N=5$ . De ellos, dos son nodos de borde (1 y 5) y los restantes tres (nodos interiores) representan a la ecuación diferencial (ver [Figura 8.3](#)). Para la teoría de vigas de Timoshenko, cada nodo tiene dos grados de libertad, el desplazamiento  $V$  y el giro  $\Psi$ ; en consecuencia, debido a que cada G.L. de la ecuación diferencial brinda un coeficiente de frecuencia, se obtendrán 6 coeficientes en total.

El mallado a implementar es irregular, del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato ([Shu y Chen, 1999](#)), y en la [Figura 8.3](#) se aprecia la distribución de los nodos citados.

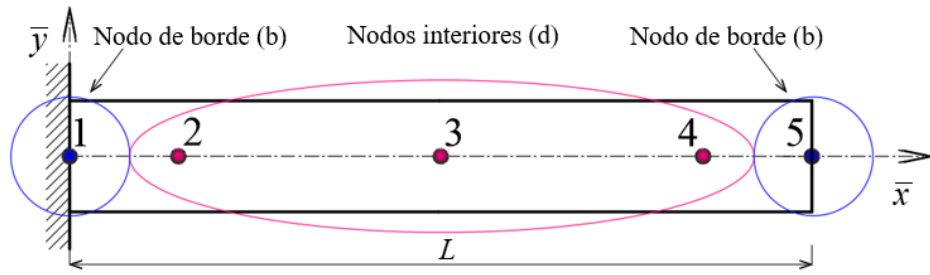


Figura 8.3: Viga Timoshenko cantilévica con malla irregular tipo Chebyshev–Gauss–Lobato.

Análogamente a lo explicado para la teoría de vigas de Bernoulli-Euler, se detalla el procedimiento para la construcción y ensamblado de las submatrices de coeficientes, y para la obtención de los coeficientes de frecuencia utilizando la teoría de vigas de Timoshenko.

Partiendo de que cada nodo, en su posición, tiene incidencia sobre sí mismo y sobre los demás nodos; se genera una matriz de coeficientes auxiliares a los que se le asigna su naturaleza, es decir, si el nodo representa una condición de borde (CB) o bien a la ecuación diferencial (ED).

	CB	ED	ED	ED	CB	CB	ED	ED	ED	CB
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$	$\Psi_5$
CB	$B_{1,1}[1,1]$	$B_{1,1}[1,2]$	$B_{1,1}[1,3]$	$B_{1,1}[1,4]$	$B_{1,1}[1,5]$	$B_{1,2}[1,1]$	$B_{1,2}[1,2]$	$B_{1,2}[1,3]$	$B_{1,2}[1,4]$	$B_{1,2}[1,5]$
ED	$B_{1,1}[2,1]$	$B_{1,1}[2,2]$	$B_{1,1}[2,3]$	$B_{1,1}[2,4]$	$B_{1,1}[2,5]$	$B_{1,2}[2,1]$	$B_{1,2}[2,2]$	$B_{1,2}[2,3]$	$B_{1,2}[2,4]$	$B_{1,2}[2,5]$
ED	$B_{1,1}[3,1]$	$B_{1,1}[3,2]$	$B_{1,1}[3,3]$	$B_{1,1}[3,4]$	$B_{1,1}[3,5]$	$B_{1,2}[3,1]$	$B_{1,2}[3,2]$	$B_{1,2}[3,3]$	$B_{1,2}[3,4]$	$B_{1,2}[3,5]$
ED	$B_{1,1}[4,1]$	$B_{1,1}[4,2]$	$B_{1,1}[4,3]$	$B_{1,1}[4,4]$	$B_{1,1}[4,5]$	$B_{1,2}[4,1]$	$B_{1,2}[4,2]$	$B_{1,2}[4,3]$	$B_{1,2}[4,4]$	$B_{1,2}[4,5]$
CB	$B_{1,1}[5,1]$	$B_{1,1}[5,2]$	$B_{1,1}[5,3]$	$B_{1,1}[5,4]$	$B_{1,1}[5,5]$	$B_{1,2}[5,1]$	$B_{1,2}[5,2]$	$B_{1,2}[5,3]$	$B_{1,2}[5,4]$	$B_{1,2}[5,5]$
CB	$B_{2,1}[1,1]$	$B_{2,1}[1,2]$	$B_{2,1}[1,3]$	$B_{2,1}[1,4]$	$B_{2,1}[1,5]$	$B_{2,2}[1,1]$	$B_{2,2}[1,2]$	$B_{2,2}[1,3]$	$B_{2,2}[1,4]$	$B_{2,2}[1,5]$
ED	$B_{2,1}[2,1]$	$B_{2,1}[2,2]$	$B_{2,1}[2,3]$	$B_{2,1}[2,4]$	$B_{2,1}[2,5]$	$B_{2,2}[2,1]$	$B_{2,2}[2,2]$	$B_{2,2}[2,3]$	$B_{2,2}[2,4]$	$B_{2,2}[2,5]$
ED	$B_{2,1}[3,1]$	$B_{2,1}[3,2]$	$B_{2,1}[3,3]$	$B_{2,1}[3,4]$	$B_{2,1}[3,5]$	$B_{2,2}[3,1]$	$B_{2,2}[3,2]$	$B_{2,2}[3,3]$	$B_{2,2}[3,4]$	$B_{2,2}[3,5]$
ED	$B_{2,1}[4,1]$	$B_{2,1}[4,2]$	$B_{2,1}[4,3]$	$B_{2,1}[4,4]$	$B_{2,1}[4,5]$	$B_{2,2}[4,1]$	$B_{2,2}[4,2]$	$B_{2,2}[4,3]$	$B_{2,2}[4,4]$	$B_{2,2}[4,5]$
CB	$B_{2,1}[5,1]$	$B_{2,1}[5,2]$	$B_{2,1}[5,3]$	$B_{2,1}[5,4]$	$B_{2,1}[5,5]$	$B_{2,2}[5,1]$	$B_{2,2}[5,2]$	$B_{2,2}[5,3]$	$B_{2,2}[5,4]$	$B_{2,2}[5,5]$

(8.95)

Se aprecia que cada coeficiente auxiliar  $B_{s,r}[i,j]$  posee 2 subíndices y 2 índices. El subíndice “s” corresponde al número de ecuación que se está contemplando, es decir, 1 para la Ec. (8.11) y 2 para la Ec. (8.12), en este caso Ecs. (8.91) y (8.92); y el subíndice “r” indica la variable en consideración 1 para el desplazamiento  $V$  y 2 para el giro  $\Psi$ . Luego, el índice “i” indica el nodo elegido o de referencia y “j” el nodo sobre el que incide.

Para construir las correspondientes submatrices, se vincula la influencia de cada nodo sobre otro y sobre sí mismo. Por ejemplo,  $B_{1,1}[1,1]$  es CB-CB  $\rightarrow$  pertenece a  $B_{bb}$ ,  $B_{1,1}[1,2]$  es CB-ED  $\rightarrow$  pertenece a  $B_{bd}$ ,  $B_{1,1}[2,5]$  es ED-CB  $\rightarrow$  pertenece a  $B_{db}$  y  $B_{1,1}[2,4]$  es ED-ED  $\rightarrow$  pertenece a  $B_{dd}$ .

Así, sucesivamente para los demás nodos, hasta llegar a:

$V_1$	$V_5$	$\Psi_1$	$\Psi_5$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$
$B_{bb}$				$B_{bd}$					
$B_{1,1}[1,1]$	$B_{1,1}[1,5]$	$B_{1,2}[1,1]$	$B_{1,2}[1,5]$	$B_{1,1}[1,2]$	$B_{1,1}[1,3]$	$B_{1,1}[1,4]$	$B_{1,2}[1,2]$	$B_{1,2}[1,3]$	$B_{1,2}[1,4]$
$B_{1,1}[5,1]$	$B_{1,1}[5,5]$	$B_{1,2}[5,1]$	$B_{1,2}[5,5]$	$B_{1,1}[5,2]$	$B_{1,1}[5,3]$	$B_{1,1}[5,4]$	$B_{1,2}[5,2]$	$B_{1,2}[5,3]$	$B_{1,2}[5,4]$
$B_{2,1}[1,1]$	$B_{2,1}[1,5]$	$B_{2,2}[1,1]$	$B_{2,2}[1,5]$	$B_{2,1}[1,2]$	$B_{2,1}[1,3]$	$B_{2,1}[1,4]$	$B_{2,2}[1,2]$	$B_{2,2}[1,3]$	$B_{2,2}[1,4]$
$B_{2,1}[5,1]$	$B_{2,1}[5,5]$	$B_{2,2}[5,1]$	$B_{2,2}[5,5]$	$B_{2,1}[5,2]$	$B_{2,1}[5,3]$	$B_{2,1}[5,4]$	$B_{2,2}[5,2]$	$B_{2,2}[5,3]$	$B_{2,2}[5,4]$
$B_{db}$				$B_{dd}$					
$B_{1,1}[2,1]$	$B_{1,1}[2,5]$	$B_{1,2}[2,1]$	$B_{1,2}[2,5]$	$B_{1,1}[2,2]$	$B_{1,1}[2,3]$	$B_{1,1}[2,4]$	$B_{1,2}[2,2]$	$B_{1,2}[2,3]$	$B_{1,2}[2,4]$
$B_{1,1}[3,1]$	$B_{1,1}[3,5]$	$B_{1,2}[3,1]$	$B_{1,2}[3,5]$	$B_{1,1}[3,2]$	$B_{1,1}[3,3]$	$B_{1,1}[3,4]$	$B_{1,2}[3,2]$	$B_{1,2}[3,3]$	$B_{1,2}[3,4]$
$B_{1,1}[4,1]$	$B_{1,1}[4,5]$	$B_{1,2}[4,1]$	$B_{1,2}[4,5]$	$B_{1,1}[4,2]$	$B_{1,1}[4,3]$	$B_{1,1}[4,4]$	$B_{1,2}[4,2]$	$B_{1,2}[4,3]$	$B_{1,2}[4,4]$
$B_{2,1}[2,1]$	$B_{2,1}[2,5]$	$B_{2,2}[2,1]$	$B_{2,2}[2,5]$	$B_{2,1}[2,2]$	$B_{2,1}[2,3]$	$B_{2,1}[2,4]$	$B_{2,2}[2,2]$	$B_{2,2}[2,3]$	$B_{2,2}[2,4]$
$B_{2,1}[3,1]$	$B_{2,1}[3,5]$	$B_{2,2}[3,1]$	$B_{2,2}[3,5]$	$B_{2,1}[3,2]$	$B_{2,1}[3,3]$	$B_{2,1}[3,4]$	$B_{2,2}[3,2]$	$B_{2,2}[3,3]$	$B_{2,2}[3,4]$
$B_{2,1}[4,1]$	$B_{2,1}[4,5]$	$B_{2,2}[4,1]$	$B_{2,2}[4,5]$	$B_{2,1}[4,2]$	$B_{2,1}[4,3]$	$B_{2,1}[4,4]$	$B_{2,2}[4,2]$	$B_{2,2}[4,3]$	$B_{2,2}[4,4]$

(8.96)

Seguidamente se identifican y asignan los coeficientes de peso a los coeficientes auxiliares empleados. Definiendo las relaciones:

$$\vartheta = \frac{S_{01}^2}{\lambda} ; \varsigma = \frac{S_{01}^4}{\lambda} ; \nu = \frac{S_{01}^4}{\lambda} - S_{01}^2 \quad (8.97)$$

se obtiene el sistema de ecuaciones lineales análogo, expresado de forma matricial y ensamblado según las reglas de Bert y Malik (1997).

$$\left( \begin{array}{cccc|cccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 B_{51}^{(1)} & B_{55}^{(1)} & 0 & -1 & B_{52}^{(1)} & B_{53}^{(1)} & B_{54}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & B_{51}^{(1)} & B_{55}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & B_{52}^{(1)} & B_{53}^{(1)} & B_{54}^{(1)} \\
 \hline
 -9B_{21}^{(2)} & -9B_{25}^{(2)} & 9B_{21}^{(1)} & 9B_{25}^{(1)} & -9B_{22}^{(2)} & -9B_{23}^{(2)} & -9B_{24}^{(2)} & 9B_{22}^{(1)} & 9B_{23}^{(1)} & 9B_{24}^{(1)} \\
 -9B_{31}^{(2)} & -9B_{35}^{(2)} & 9B_{31}^{(1)} & 9B_{35}^{(1)} & -9B_{32}^{(2)} & -9B_{33}^{(2)} & -9B_{34}^{(2)} & 9B_{32}^{(1)} & 9B_{33}^{(1)} & 9B_{34}^{(1)} \\
 -9B_{41}^{(2)} & -9B_{45}^{(2)} & 9B_{41}^{(1)} & 9B_{45}^{(1)} & -9B_{42}^{(2)} & -9B_{43}^{(2)} & -9B_{44}^{(2)} & 9B_{42}^{(1)} & 9B_{43}^{(1)} & 9B_{44}^{(1)} \\
 -\varsigma B_{21}^{(1)} & -\varsigma B_{25}^{(1)} & \nu B_{21}^{(2)} & \nu B_{25}^{(2)} & -\varsigma B_{22}^{(1)} & -\varsigma B_{23}^{(1)} & -\varsigma B_{24}^{(1)} & \nu B_{22}^{(2)} & \nu B_{23}^{(2)} & \nu B_{24}^{(2)} \\
 -\varsigma B_{31}^{(1)} & -\varsigma B_{35}^{(1)} & \nu B_{31}^{(2)} & \nu B_{35}^{(2)} & -\varsigma B_{32}^{(1)} & -\varsigma B_{33}^{(1)} & -\varsigma B_{34}^{(1)} & \nu B_{32}^{(2)} & \nu B_{33}^{(2)} & \nu B_{34}^{(2)} \\
 -\varsigma B_{41}^{(1)} & -\varsigma B_{45}^{(1)} & \nu B_{41}^{(2)} & \nu B_{45}^{(2)} & -\varsigma B_{42}^{(1)} & -\varsigma B_{43}^{(1)} & -\varsigma B_{44}^{(1)} & \nu B_{42}^{(2)} & \nu B_{43}^{(2)} & \nu B_{44}^{(2)}
 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_5 \\ \Psi_1 \\ \Psi_5 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{array} \right\} = \Omega^2 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{array} \right\} \quad (8.98)$$

Análogamente a la Ec. (4.25), se describen algunas particularidades de la Ec. (8.98):

1. Los valores de los coeficientes ubicados en la diagonal principal deben ser no nulos.
2. Las submatrices  $[B_{bb}]$  y  $[B_{dd}]$  siempre son cuadradas, lo cual constituye un factor indispensable para  $[B_{bb}]$  debido a que hay que calcular su inversa.
3. Al estar todas las condiciones de borde igualadas a cero, el sistema resultante tiene

dimensiones  $N - 4 \times N - 4$ . Esto se cumple para todas las condiciones de borde clásicas, ya que son independientes de los autovalores del problema.

4. A diferencia de la formulación para Bernoulli-Euler, la dimensión de la matriz  $\mathbf{B}$  es el doble porque cada nodo introduce dos GL. Desde el punto de vista de la programación se elige ordenar primero a los desplazamientos y luego los giros, por la sencillez de generar las matrices. Pero, está la libertad del programador de intercalar desplazamiento y giro de cada nodo, siempre y cuando se cumpla lo citado en el punto 1.
5. Otra diferencia importante en la formulación, es que para la teoría de Timoshenko se emplean solamente 2 nodos para representar las condiciones de borde. Es decir, los nodos 1 y  $N=5$  (en este caso), dado a que cada nodo posee dos grados de libertad. Esto evita los supuestos tratados en la teoría de Bernoulli-Euler, para modelar las condiciones de frontera.

Luego, para hallar los respectivos coeficientes de frecuencia naturales, se resuelve el problema de autovalores de acuerdo con lo explicado en capítulo 4. Hay que hacer la salvedad de que el sistema de ecuaciones lineales de la Ec. (4.6), adopta esta nueva forma:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{bb} & B_{bd} \\ B_{db} & B_{dd} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Y_b\} \\ \{Y_d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \Omega^2 \{Y_d\} \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{Bmatrix} \{Y_b\} \\ \{Y_d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{V_b, \Psi_b\}^t \\ \{V_d, \Psi_d\}^t \end{Bmatrix} \quad (8.99)$$

Seguidamente, se realiza el análisis de convergencia partiendo del número mínimo de nodos citado ( $N=5$ ). Se emplea una viga cantiléver homogénea de sección constante y sin masa adosada. Los restantes parámetros que la caracterizan son:  $S=10$ ,  $\kappa=5/6$  y  $\mu=0.3$ .

En la [Tabla 8.4](#), se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos por medio de GDQM y contrastados con los valores exactos determinados por [Maiz \(2006\)](#).

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$N$
3.16163	13.8823	39.4689	56.9918	72.7846	5
3.22767	14.4919	31.3884	45.8674	64.0954	7
3.22713	14.4684	31.5260	48.1455	62.7473	9
3.22713	14.4689	31.5016	47.8895	62.3557	11
3.22713	14.4689	31.5026	47.9100	62.3475	13
3.22713	14.4689	31.5025	47.9090	62.3470	15
3.22713	14.4689	31.5025	47.9090	62.3470	<a href="#">Maiz (2006)</a>

Tabla 8.4: Convergencia de GDQM. Viga cantiléver uniforme y homogénea ( $S=10$ ,  $\kappa=5/6$ ,  $\mu=0.3$ ).

Del estudio, se observa que con  $N=15$  nodos se obtiene una excelente solución.

Considerando el mismo caso para analizar la convergencia de FEM, se obtienen y exponen en la [Tabla 8.5](#), los primeros 5 coeficientes de frecuencia.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$n_e$
3.22885	14.6090	32.8798	52.0147	69.9124	5
3.22756	14.5044	31.8601	49.0437	64.4178	10
3.22714	14.4704	31.5169	47.9552	62.4315	50
3.22713	14.4693	31.5061	47.9206	62.3682	100
3.22713	14.4689	31.5027	47.9095	62.3479	500
3.22713	14.4689	31.5026	47.9091	62.3472	1000
3.22713	14.4689	31.5026	47.9091	62.3471	1500
3.22713	14.4689	31.5025	47.9091	62.3471	2000
3.22713	14.4689	31.5025	47.9090	62.3470	2500
3.22713	14.4689	31.5025	47.9090	62.3470	Maiz (2006)

Tabla 8.5: Convergencia de FEM. Viga cantiléver uniforme y homogénea. ( $M = 0, S = 10, \kappa = 5/6, \mu = 0.3$ ).

En este caso, se aprecia que con  $n_e = 2500$  elementos se obtiene una excelente solución.

### 8.5.1.2 Viga cantiléver con masa

Se considera una masa puntual adosada en el extremo libre, contemplando su efecto traslacional y rotacional sobre las vibraciones libres, de una viga cantiléver uniforme y homogénea. Las ecuaciones diferenciales que rigen el problema son las expuestas en la Ec. (8.93) y las condiciones de borde adoptan la forma (Tablas 8.2 y 8.3):

$$x_1 = 0: \begin{cases} V_{i1}|_{i=1} = 0 \\ \Psi_{i1}|_{i=1} = 0 \end{cases} \quad x_1 = 1: \begin{cases} \frac{S_{01}^2}{M \lambda} \left[ \left( \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{ij1} - \Psi_{i1} \right) \right]_{i=N_1} = \Omega^2 V_{i1}|_{i=N_1} \\ \frac{1}{M c_m^2} \left[ \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \Psi_{ij1} \right]_{i=N_1} = \Omega^2 \Psi_{i1}|_{i=N_1} \end{cases} \quad (8.100)$$

Por lo tanto, el ordenamiento de la Ec. (8.96), ahora es el siguiente:

$V_1$	$\Psi_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$	$\Psi_5$
$B_{bb}$		$B_{bd}$							
$B_{1,1}[1,1]$	$B_{1,2}[1,1]$	$B_{1,1}[1,2]$	$B_{1,1}[1,3]$	$B_{1,1}[1,4]$	$B_{1,1}[1,5]$	$B_{1,2}[1,2]$	$B_{1,2}[1,3]$	$B_{1,2}[1,4]$	$B_{1,2}[1,5]$
$B_{2,1}[1,1]$	$B_{2,2}[1,1]$	$B_{2,1}[1,2]$	$B_{2,1}[1,3]$	$B_{2,1}[1,4]$	$B_{2,1}[1,5]$	$B_{2,2}[1,2]$	$B_{2,2}[1,3]$	$B_{2,2}[1,4]$	$B_{2,2}[1,5]$
$B_{db}$		$B_{dd}$							
$B_{1,1}[2,1]$	$B_{1,2}[2,1]$	$B_{1,1}[2,2]$	$B_{1,1}[2,3]$	$B_{1,1}[2,4]$	$B_{1,1}[2,5]$	$B_{1,2}[2,2]$	$B_{1,2}[2,3]$	$B_{1,2}[2,4]$	$B_{1,2}[2,5]$
$B_{1,1}[3,1]$	$B_{1,2}[3,1]$	$B_{1,1}[3,2]$	$B_{1,1}[3,3]$	$B_{1,1}[3,4]$	$B_{1,1}[3,5]$	$B_{1,2}[3,2]$	$B_{1,2}[3,3]$	$B_{1,2}[3,4]$	$B_{1,2}[3,5]$
$B_{1,1}[4,1]$	$B_{1,2}[4,1]$	$B_{1,1}[4,2]$	$B_{1,1}[4,3]$	$B_{1,1}[4,4]$	$B_{1,1}[4,5]$	$B_{1,2}[4,2]$	$B_{1,2}[4,3]$	$B_{1,2}[4,4]$	$B_{1,2}[4,5]$
$B_{1,1}[5,1]$	$B_{1,2}[5,1]$	$B_{1,1}[5,2]$	$B_{1,1}[5,3]$	$B_{1,1}[5,4]$	$B_{1,1}[5,5]$	$B_{1,2}[5,2]$	$B_{1,2}[5,3]$	$B_{1,2}[5,4]$	$B_{1,2}[5,5]$
$B_{2,1}[2,1]$	$B_{2,2}[2,1]$	$B_{2,1}[2,2]$	$B_{2,1}[2,3]$	$B_{2,1}[2,4]$	$B_{2,1}[2,5]$	$B_{2,2}[2,2]$	$B_{2,2}[2,3]$	$B_{2,2}[2,4]$	$B_{2,2}[2,5]$
$B_{2,1}[3,1]$	$B_{2,2}[3,1]$	$B_{2,1}[3,2]$	$B_{2,1}[3,3]$	$B_{2,1}[3,4]$	$B_{2,1}[3,5]$	$B_{2,2}[3,2]$	$B_{2,2}[3,3]$	$B_{2,2}[3,4]$	$B_{2,2}[3,5]$
$B_{2,1}[4,1]$	$B_{2,2}[4,1]$	$B_{2,1}[4,2]$	$B_{2,1}[4,3]$	$B_{2,1}[4,4]$	$B_{2,1}[4,5]$	$B_{2,2}[4,2]$	$B_{2,2}[4,3]$	$B_{2,2}[4,4]$	$B_{2,2}[4,5]$
$B_{2,1}[5,1]$	$B_{2,2}[5,1]$	$B_{2,1}[5,2]$	$B_{2,1}[5,3]$	$B_{2,1}[5,4]$	$B_{2,1}[5,5]$	$B_{2,2}[5,2]$	$B_{2,2}[5,3]$	$B_{2,2}[5,4]$	$B_{2,2}[5,5]$

Como consecuencia de que se consideran el doble efecto (traslacional y rotacional) de la masa adosada en el extremo libre, representada en el nodo 5 (Figura 8.3), las filas y columnas

2 y 4 pertenecientes a la submatriz  $[B_{bb}]$  deben cambiarse de lugar para contemplarlos. La razón es que el autovalor está contenido en la condición de borde, por lo que las componentes del vector  $Y_b = \{V_5, \Psi_5\}^T$  se deben agrupar en el vector  $Y_d = \{V_d, \Psi_d\}^T$  de la ecuación diferencial.

De esta manera, la Ec. (8.98) adopta una nueva forma, y para la cual se define:

$$\alpha = \frac{S_{01}^2}{M \lambda}; \beta = \frac{1}{M c_m^2} \quad (8.102)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9B_{21}^{(2)} & 9B_{21}^{(1)} & -9B_{22}^{(2)} & -9B_{23}^{(2)} & -9B_{24}^{(2)} & -9B_{25}^{(2)} & 9B_{22}^{(1)} & 9B_{23}^{(1)} & 9B_{24}^{(1)} & 9B_{25}^{(1)} \\ -9B_{31}^{(2)} & 9B_{31}^{(1)} & -9B_{32}^{(2)} & -9B_{33}^{(2)} & -9B_{34}^{(2)} & -9B_{35}^{(2)} & 9B_{32}^{(1)} & 9B_{33}^{(1)} & 9B_{34}^{(1)} & 9B_{35}^{(1)} \\ -9B_{41}^{(2)} & 9B_{41}^{(1)} & -9B_{42}^{(2)} & -9B_{43}^{(2)} & -9B_{44}^{(2)} & -9B_{45}^{(2)} & 9B_{42}^{(1)} & 9B_{43}^{(1)} & 9B_{44}^{(1)} & 9B_{45}^{(1)} \\ \alpha B_{51}^{(1)} & 0 & \alpha B_{52}^{(1)} & \alpha B_{53}^{(1)} & \alpha B_{54}^{(1)} & \alpha B_{55}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -\zeta B_{21}^{(1)} & \nu B_{21}^{(2)} & -\zeta B_{22}^{(1)} & -\zeta B_{23}^{(1)} & -\zeta B_{24}^{(1)} & -\zeta B_{25}^{(1)} & \nu B_{22}^{(2)} & \nu B_{23}^{(2)} & \nu B_{24}^{(2)} & \nu B_{25}^{(2)} \\ -\zeta B_{31}^{(1)} & \nu B_{31}^{(2)} & -\zeta B_{32}^{(1)} & -\zeta B_{33}^{(1)} & -\zeta B_{34}^{(1)} & -\zeta B_{35}^{(1)} & \nu B_{32}^{(2)} & \nu B_{33}^{(2)} & \nu B_{34}^{(2)} & \nu B_{35}^{(2)} \\ -\zeta B_{41}^{(1)} & \nu B_{41}^{(2)} & -\zeta B_{42}^{(1)} & -\zeta B_{43}^{(1)} & -\zeta B_{44}^{(1)} & -\zeta B_{45}^{(1)} & \nu B_{42}^{(2)} & \nu B_{43}^{(2)} & \nu B_{44}^{(2)} & \nu B_{45}^{(2)} \\ 0 & \beta B_{51}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta B_{52}^{(1)} & \beta B_{53}^{(1)} & \beta B_{54}^{(1)} & \beta B_{55}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \Psi_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \end{Bmatrix} \quad (8.103)$$

El caso estudiado para la viga sin masa adosada corresponde a un parámetro de esbeltez bajo ( $S = 10$ ), Tablas 8.4 y 8.5. En cambio, si se considera una viga de esbeltez mayor, puede demostrarse que el método de elementos finitos converge más rápido y que para GDQM no influye demasiado.

Con este propósito, es que se modela una viga cantiléver uniforme y homogénea, con una masa ( $M = 1, c_m = 0.1$ ) adosada en el extremo libre ( $x_m = 1$ ) y con parámetros:  $S = 100, \kappa = 5/6$  y  $\mu = 0.3$ . Las Tablas 8.6 y 8.7 presentan el estudio de convergencia para los dos métodos citados, cuyos valores son contrastados con la solución exacta obtenida por Maiz (2006).

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$N$
1.51874	13.3083	34.4444	342.096	502.395	5
1.54319	13.1740	31.7133	70.5513	130.581	7
1.54286	13.2007	31.8572	65.6312	120.407	9
1.54286	13.2005	31.8514	65.6203	120.452	11
1.54286	13.2006	31.8515	65.6188	120.432	13
1.54286	13.2006	31.8515	65.6188	120.433	15
1.54286	13.2006	31.8515	65.6188	120.433	Maiz (2006)

Tabla 8.6: Convergencia de GDQM. Viga cantiléver uniforme y homogénea ( $S = 100, \kappa = 5/6, \mu = 0.3$ ) con una masa adosada ( $M = 1, c_m = 0.1$ ) en  $x_m = 1$ .



$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$n_e$
1.54286	13.2008	31.8550	65.6659	120.752	10
1.54286	13.2006	31.8516	65.6201	120.441	50
1.54286	13.2006	31.8515	65.6191	120.435	100
1.54286	13.2006	31.8515	65.6189	120.434	150
1.54286	13.2006	31.8515	65.6188	120.433	200
1.54286	13.2006	31.8515	65.6188	120.433	Maiz (2006)

Tabla 8.7: Convergencia de FEM. Viga cantiléver uniforme y homogénea ( $S=100, \kappa=5/6, \mu=0.3$ ) con una masa adosada ( $M=1, c_m=0.1$ ) en  $x_m=1$ .

En la [Tabla 8.6](#), se verifica que GDQM converge a la solución exacta con  $N=15$  nodos. Y en la [Tabla 8.7](#), se aprecia que el número de elementos en FEM se reduce considerablemente, y es evidente que para esbelteces pequeñas haya que utilizar más cantidad de elementos.

## 8.5.2 Casos de comparación

Los 3 métodos aproximados desarrollados son contrastados con dos casos particulares disponibles en la literatura.

### 8.5.2.1 Viga en voladizo de material homogéneo:

El primer caso en comparación corresponde una viga Timoshenko rotante, de sección transversal rectangular y doblemente ahusada; estudiada por [Ozgumus y Kaya \(2008\)](#). Debido a que el modelo planteado en la [Figura 8.1](#) no contempla el movimiento de rotación respecto al eje  $\bar{y}$ , los resultados se compararán únicamente para los casos en que la velocidad de rotación de la viga es nula (en el modelo de comparación).

Estos autores obtuvieron los primeros cuatro coeficientes de frecuencia, empleando el método de transformación diferencial (DTM, sus siglas en inglés). La ley de variación que optaron para la variación de los parámetros geométricos es:

$$b(x)=b_0(1-c_b x)^n; h(x)=h_0(1-c_h x)^n \quad \text{con} \quad c_b=1-\frac{b_L}{b_0} \quad \text{y} \quad c_h=1-\frac{h_L}{h_0} \quad \text{y} \quad n=1. \quad (8.104)$$

La viga, además, está caracterizada por:  $S=12.5$ ,  $\mu=0.3$  y  $E/\kappa G=3.059$ . Dentro de los casos estudiados, se modela el más complejo en cuanto al ahusamiento, puesto a que en la modelación demanda siempre mayor: número de nodos en GDQM, términos de polinomios en Rayleigh-Ritz y elementos en FEM.

En la [Tabla 8.8](#), se indican los primeros 4 coeficientes de frecuencia para la viga en voladizo homogénea, de sección transversal ahusada y sin masa.

Los coeficientes de frecuencia determinados reflejan una excelente concordancia para todos los casos. La precisión se obtuvo de un minucioso análisis de convergencia. Se implementan

$N = 23$  nodos en GDQM,  $N_p = 20$  términos de polinomios en el método de Rayleigh-Ritz y  $n_e = 2000$  elementos en FEM.

$c_b \backslash c_h$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	Solución	$\Omega_i$
0.8	4.11768	4.35163	4.66552	4.86899	5.11941	5.86286	M.R-Ritz	1
	4.11768	4.35163	4.66552	4.86899	5.11941	5.86286	GDQM	
	4.11768	4.35163	4.66552	4.86899	5.11941	5.86286	FEM	
	4.11768	4.35163	4.66552	4.86899	5.11941	5.86286	<a href="#">Ozgumus y Kaya (2008)</a>	
	13.7574	14.0370	14.4055	14.6445	14.9439	15.9229	M.R-Ritz	2
	13.7574	14.0370	14.4055	14.6445	14.9439	15.9229	GDQM	
	13.7574	14.0370	14.4055	14.6445	14.9439	15.9229	FEM	
	13.7574	14.0370	14.4055	14.6445	14.9439	15.9229	<a href="#">Ozgumus y Kaya (2008)</a>	
	28.6360	28.9031	29.2519	29.4779	29.7625	30.7255	M.R-Ritz	3
	28.6360	28.9031	29.2519	29.4779	29.7625	30.7255	GDQM	
	28.6360	28.9031	29.2519	29.4779	29.7625	30.7255	FEM	
	28.6360	28.9031	29.2519	29.4779	29.7625	30.7255	<a href="#">Ozgumus y Kaya (2008)</a>	
	46.8288	47.0683	47.3811	47.5848	47.8431	48.7392	M.R-Ritz	4
	46.8288	47.0683	47.3811	47.5848	47.8431	48.7392	GDQM	
	46.8288	47.0683	47.3811	47.5848	47.8431	48.7392	FEM	
	46.8288	47.0683	47.3811	47.5848	47.8431	48.7392	<a href="#">Ozgumus y Kaya (2008)</a>	

Tabla 8.8: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea, de sección transversal ahusada.  $S = 12.5$ ,  $\mu = 0.3$  y  $E/\kappa G = 3.059$ .

En referencia al estudio de convergencia para la viga cantiléver homogénea ( $S = 10$ ,  $n_e = 2500$ ), se aprecia que el número de elementos disminuye. Esto se justifica en que el parámetro de esbeltez  $S$  aumenta y, además, en que la incidencia de la variación de la sección se reduce a medida que las vigas son más esbeltas (menor incidencia de los efectos de corte e inercia rotacional de la viga).

En cambio, GDQM requiere densificar el mallado para mejorar su precisión ante el ahusamiento; tal como se evidenció en el capítulo 4, para la teoría de vigas de Bernoulli-Euler.

### 8.5.2.2 Viga AFG con distintas C.B. clásicas:

El segundo caso en consideración es una viga Timoshenko de sección transversal doblemente ahusada y compuesta por material AFG. Este caso fue estudiado por varios autores, entre ellos cabe citar: [Shahba et al. \(2011\)](#) empleando FEM, [Huang et al. \(2013\)](#) utilizando un método de transformación por variable auxiliar y [Zhao et al. \(2017\)](#) mediante la teoría de polinomios de Chebyshev.

Los dos materiales que constituyen al material AFG son: zirconia ( $ZrO_2$ ) y aluminio (Al),

cuyas propiedades están descriptas en la Ec. (7.21) y varían de forma cuadrática ( $n = 2$ ) en la ley axial asimétrica definida en la Ec. (2.12). Además, se deben adoptar los siguientes parámetros:  $S = 10$ ,  $\kappa = 5/6$  y  $\mu = 0.3$ ; y para modelar la sección doblemente ahusada:

$$A(x) = A_0(1 - 0.1x); I(x) = I_0(1 - 0.1x)^3 \text{ con } x \in [0,1]. \quad (8.105)$$

Los primeros 5 coeficientes de frecuencia, para distintas C.B., se exponen en la [Tabla 8.9](#).

C.B.	GDQM	M.R-Ritz	FEM	<a href="#">Shahba et al. (2011)</a>	<a href="#">Huang et al. (2013)</a>	<a href="#">Zhao et al. (2017)</a>	$\Omega_i$
E-L	3.93579	3.93579	3.93579	3.9359	3.93579	3.93585	1
	15.1533	15.1533	15.1533	15.1577	15.1533	15.1540	2
	31.2239	31.2239	31.2239	31.2638	31.2239	31.2257	3
	47.5836	47.5836	47.5837	47.7164	47.5857	47.5871	4
	62.7344	62.7344	62.7346	—	—	—	5
E-A	10.8007	10.8007	10.8007	—	10.8007	10.8011	1
	25.6179	25.6179	25.6179	—	25.6179	25.6194	2
	42.6474	42.6474	42.6474	—	42.6478	42.6502	3
	58.8528	58.8528	58.8529	—	58.8595	58.8588	4
	62.7800	62.7800	62.7800	—	—	—	5
E-E	12.4633	12.4633	12.4633	12.4689	12.4633	12.4691	1
	26.3804	26.3804	26.3804	26.4153	26.3804	26.3822	2
	42.9607	42.9607	42.9607	43.0904	42.9611	42.9636	3
	59.3916	59.3916	59.3916	59.6829	59.4023	59.3958	4
	68.0580	68.0580	68.0581	—	—	—	5
A-A	7.65276	7.65276	7.65276	7.6545	—	7.6529	1
	23.7126	23.7126	23.7126	23.7369	—	—	2
	41.7042	41.7042	41.7042	41.8210	—	—	3
	57.7613	57.7613	57.7614	57.8739	—	—	4
	60.1514	60.1514	60.1515	—	—	—	5

Tabla 8.9: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG sección ahusada y con C.B. clásicas. ( $S = 10, \kappa = 5/6, \mu = 0.3$ ). Sin masa ( $M = 0$ ).

Se observa una excelente correlación entre los resultados. Los métodos empleados, presentan mayor semejanza con el trabajo de [Huang et al. \(2013\)](#). La precisión, para los métodos empleados, se obtiene de implementar  $N = 23$  nodos en GDQM,  $N_p = 20$  términos de polinomios en Rayleigh-Ritz y  $n_e = 2000$  elementos en FEM.

### 8.5.3 Casos propuestos

Considerando las conclusiones de rigidización dinámica, obtenidas en los capítulos anteriores, se analiza el comportamiento dinámico de algunos casos particulares del modelo de viga AFG mostrado por la [Figura 8.1](#). Paralelamente, se pone énfasis en comparar el desempeño los métodos aproximados desarrollados.

Para la variación de la geometría y de las propiedades del material AFG, propuesto por [Su et al. \(2013\)](#), se implementa la ley asimétrica con variación lineal ( $n = 1$  en la Ec. (2.12)). Las

propiedades de dicho material se presentan en la [Tabla 2.4](#).

Para todos los casos se consideran los parámetros:  $S = 10$ ,  $\kappa = 5/6$  y  $\mu = 0.3$ ; que las alturas  $h_{11}$ ,  $h_{02}$  y  $h_{12}$  estarán en relación a  $h_{01}$ , y los valores de los coeficientes de frecuencia y de masa están referenciados a los de una viga de acero y de sección constante:

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{Ac} A_{01}}{E_{Ac} I_{01}}}; M = \frac{m}{\rho_{Ac} A_{01} L} \quad (8.106)$$

### 8.5.3.1 Viga AFG en voladizo de un tramo con masa

Se modela una viga cantiléver AFG de un tramo, con una masa puntual  $m$  adosada en el extremo libre ( $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$  y  $x_m = 1$ ) y composición b) Alum-Ac para el material AFG. La sección transversal es ahusada, con ancho  $b$  y altura  $h$  variando de forma lineal, con la ley de variación definida en la Ec. (8.104).

En las [Tablas 8.10](#) y [8.11](#), se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos.

$c_b$	0			0.2			0.4			$\Omega_i$
$c_h$	M.R-Ritz	GDQM	FEM	M.R-Ritz	GDQM	FEM	M.R-Ritz	GDQM	FEM	
0	1.88130	1.88130	1.88130	1.75588	1.75588	1.75588	1.60243	1.60243	1.60243	1
	13.4819	13.4819	13.4819	11.9635	11.9635	11.9635	9.82421	9.82421	9.82421	2
	26.4658	26.4658	26.4658	23.0273	23.0273	23.0273	19.6585	19.6585	19.6585	3
	40.3111	40.3111	40.3111	39.0052	39.0052	39.0052	37.2090	37.2090	37.2090	4
	62.6553	62.6553	62.6554	61.2544	61.2544	61.2545	59.3429	59.3429	59.3430	5
0.2	1.85118	1.85118	1.85118	1.71783	1.71783	1.71783	1.55674	1.55674	1.55674	1
	13.2387	13.2387	13.2387	11.5731	11.5731	11.5731	9.31351	9.31351	9.31351	2
	25.0496	25.0496	25.0496	21.9930	21.9930	21.9930	19.0891	19.0891	19.0891	3
	39.8908	39.8908	39.8908	38.7224	38.7224	38.7224	37.0747	37.0747	37.0747	4
	62.5227	62.5227	62.5228	61.1589	61.1589	61.1590	59.3021	59.3021	59.3022	5
0.4	1.81197	1.81197	1.81197	1.67032	1.67032	1.67032	1.50138	1.50138	1.50138	1
	12.8317	12.8317	12.8317	10.9868	10.9868	10.9868	8.62902	8.62902	8.62902	2
	23.4238	23.4238	23.4238	20.8777	20.8777	20.8778	18.5039	18.5039	18.5039	3
	39.4539	39.4539	39.4539	38.4144	38.4144	38.4144	36.9159	36.9159	36.9159	4
	62.3584	62.3584	62.3585	61.0351	61.0351	61.0352	59.2379	59.2379	59.2380	5
0.6	1.75839	1.75839	1.75839	1.60814	1.60814	1.60814	1.43118	1.43118	1.43118	1
	12.0905	12.0905	12.0905	10.0577	10.0577	10.0577	7.67638	7.67638	7.67638	2
	21.5592	21.5592	21.5592	19.6643	19.6643	19.6643	17.8717	17.8717	17.8717	3
	38.9287	38.9287	38.9287	38.0173	38.0173	38.0173	36.6789	36.6789	36.6789	4
	62.1127	62.1127	62.1128	60.8351	60.8351	60.8352	59.1067	59.1067	59.1068	5
0.8	1.67677	1.67677	1.67677	1.51795	1.51795	1.51795	1.33301	1.33301	1.33301	1
	10.5573	10.5573	10.5573	8.44811	8.44811	8.44811	6.23520	6.23520	6.23520	2
	19.3479	19.3479	19.3479	18.2189	18.2189	18.2189	17.0422	17.0422	17.0422	3
	38.0537	38.0537	38.0537	37.2904	37.2904	37.2904	36.1528	36.1528	36.1528	4
	61.5834	61.5834	61.5835	60.3608	60.3608	60.3609	58.7223	58.7223	58.7224	5

Tabla 8.10: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG de sección ahusada ( $b$  y  $h$  variando de forma lineal). Con masa adosada  $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$  y  $x_m = 1$

$c_b$	0.5			0.6			0.8			$\Omega_i$
$c_h$	M.R-Ritz	GDQM	FEM	M.R-Ritz	GDQM	FEM	M.R-Ritz	GDQM	FEM	
0	1.51087	1.51087	1.51087	1.40522	1.40522	1.40522	1.11966	1.11966	1.11966	1
	8.48054	8.48054	8.48054	6.96337	6.96337	6.96337	3.56663	3.56663	3.56663	2
	18.0718	18.0718	18.0718	16.5430	16.5430	16.5430	13.4092	13.4092	13.4092	3
	36.0544	36.0544	36.0544	34.6519	34.6519	34.6519	30.5656	30.5656	30.5656	4
	58.0723	58.0723	58.0724	56.4674	56.4674	56.4675	51.3620	51.3620	51.3621	5
0.2	1.46159	1.46159	1.46159	1.35259	1.35259	1.35259	1.06167	1.06167	1.06167	1
	7.95419	7.95419	7.95419	6.46687	6.46687	6.46687	3.26436	3.26436	3.26436	2
	17.7194	17.7194	17.7194	16.3752	16.3752	16.3752	13.4995	13.4995	13.4995	3
	35.9940	35.9940	35.9941	34.6634	34.6634	34.6635	30.7132	30.7132	30.7133	4
	58.0669	58.0669	58.0670	56.5032	56.5032	56.5033	51.4988	51.4988	51.4989	5
0.4	1.40258	1.40258	1.40258	1.29022	1.29022	1.29022	0.99389	0.99389	0.99389	1
	7.28429	7.28429	7.28429	5.86116	5.86116	5.86116	2.91467	2.91467	2.91467	2
	17.3619	17.3619	17.3619	16.2080	16.2080	16.2080	13.6087	13.6087	13.6087	3
	35.9137	35.9137	35.9137	34.6629	34.6629	34.6629	30.8750	30.8750	30.8750	4
	58.0423	58.0423	58.0424	56.5261	56.5261	56.5262	51.6450	51.6450	51.6451	5
0.6	1.32867	1.32867	1.32867	1.21288	1.21288	1.21288	0.91074	0.91074	0.91074	1
	6.39888	6.39888	6.39888	5.09208	5.09208	5.09208	2.49242	2.49242	2.49242	2
	16.9662	16.9662	16.9662	16.0121	16.0121	16.0121	13.7276	13.7276	13.7276	3
	35.7667	35.7667	35.7667	34.6123	34.6123	34.6123	31.0390	31.0390	31.0390	4
	57.9588	57.9588	57.9589	56.5020	56.5020	56.5021	51.7884	51.7884	51.7885	5
0.8	1.22677	1.22677	1.22677	1.10737	1.10737	1.10737	0.79737	0.79737	0.79737	1
	5.12255	5.12255	5.12255	4.02336	4.02336	4.02336	1.93350	1.93350	1.93350	2
	16.3916	16.3916	16.3916	15.6655	15.6655	15.6655	13.7949	13.7949	13.7949	3
	35.3630	35.3630	35.3630	34.3481	34.3481	34.3481	31.1238	31.1238	31.1238	4
	57.6417	57.6417	57.6418	56.2745	56.2745	56.2746	51.8449	51.8449	51.8450	5

Tabla 8.11: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG de sección ahusada ( $b$  y  $h$  variando de forma lineal). Con masa adosada  $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$  y  $x_m = 1$ .

Se observa una excelente concordancia en los resultados. La precisión se obtiene de utilizar  $N_p = 20$  términos de polinomios en Rayleigh-Ritz,  $N = 23$  nodos en GDQM, y FEM requiere emplear  $n_e = 3000$  elementos para contemplar los casos de mayor ahusamiento.

### 8.5.3.2 Viga en voladizo de dos tramos con masa en el extremo libre

Se modelan dos casos particulares de vigas en voladizo. Las vigas poseen ancho constante  $b = b_{01}$  en ambos tramos y para las propiedades de los materiales AFG se asume la composición b) Alum-Ac. Además, se considera para la masa adosada ( $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$ ) en  $x_2 = 1$ .

**Caso A:** corresponde a una viga en cuyo primer tramo la altura  $h$  varía linealmente (con  $n = 1$  en la Ec. (2.12)), así como las propiedades del material AFG. El segundo tramo, comienza en  $x_s = 2/3$  y puede estar constituido por acero [1] o bien por material AFG [2] con propiedades variando también de forma lineal.

**Caso B:** modifica la geometría del Caso A, considerando altura variable (de forma lineal (con  $n = 1$  en la Ec. (2.12)) en los dos tramos.

Los casos de vigas enunciados se aprecian en la [Figura 8.4](#).

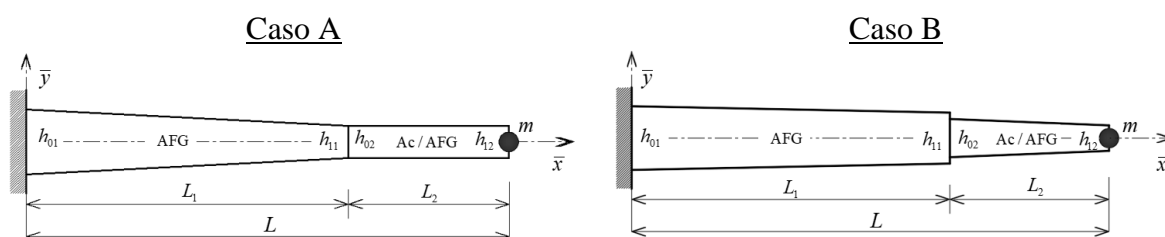


Figura 8.4: Vigas Timoshenko cantiléver AFG de dos tramos y con una masa ( $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$ ) en  $x_2 = 1$ .

Los primeros 5 coeficientes de frecuencia para los casos A y B se presentan en la [Tabla 8.12](#) y [Tabla 8.13](#), respectivamente.

Caso A	$h_{01}$	$h_{11}$	$h_{02}$	$h_{12}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
[1]	1	0.5	0.5	0.5	1.18450	6.96254	16.0157	31.8135	50.5839	M.R-Ritz
					1.18448	6.96249	16.0156	31.8134	50.5836	GDQM
					1.18448	6.96250	16.0156	31.8134	50.5836	FEM
[2]	1	0.5	0.5	0.5	1.23745	7.82810	17.2651	36.1796	56.1042	M.R-Ritz
					1.23595	7.82059	17.2529	36.1517	56.0532	GDQM
					1.23596	7.82110	17.2536	36.1535	56.0575	FEM

Tabla 8.12: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG en voladizo de dos tramos con masa -Caso A-.

Caso B	$h_{01}$	$h_{11}$	$h_{02}$	$h_{12}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
[1]	1	0.8	0.6	0.4	1.50833	6.67276	14.8853	31.8671	52.3137	M.R-Ritz
					1.50585	6.66850	14.8640	31.8597	52.2284	GDQM
					1.50595	6.66966	14.8653	31.8602	52.2308	FEM
[2]	1	0.8	0.6	0.4	1.58577	7.39851	16.2540	35.7735	58.2406	M.R-Ritz
					1.58558	7.39810	16.2517	35.7709	58.2254	GDQM
					1.58566	7.40002	16.2533	35.7735	58.2303	FEM

Tabla 8.13: Coeficientes de frecuencia para viga AFG en voladizo de dos tramos ahusados con masa-Caso B-.

De las [Tablas 8.12](#) y [8.13](#), se aprecia que los resultados tienen buena concordancia para los métodos empleados. En los cálculos se utilizan:  $N_p = 30$  términos de polinomios para el método de Rayleigh-Ritz,  $N_k = 23$  nodos (por tramo) en GDQM y  $n_e = 6000$  elementos en FEM. Si bien se aprecia que el método de Rayleigh-Ritz, tiene dificultades para representar estas singularidades (con funciones aproximantes continuas), sigue siendo cota superior del problema, lo que da certezas del buen funcionamiento de los otros métodos.

### 8.5.3.3 Vigas AFG con ley simétrica de dos tramos y con masa adosada en el centro

Se modelan dos casos de vigas AFG para las vinculaciones: simplemente apoyada y biempotrada. En ambos, se contempla la posibilidad de disponer una masa en la mitad de la longitud de la viga ( $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$  y  $x_m = 0.5$ ). La composición del material AFG varía

linealmente, con acero en los vínculos y alúmina en el centro del tramo. Se estudian los casos:

**Caso C:** Viga de sección transversal ahusada, ancho constante  $b = b_{01}$  y altura  $h$  variando linealmente. Se modela considerando, en la [Figura 8.1](#),  $h_{01} = h_{12}$  y  $h_{11} = h_{02}$ ; y como caso particular, la viga de sección transversal constante con:  $h = h_{01} = h_{11}$ .

**Caso D:** Viga de sección transversal doblemente ahusada, ancho  $b$  y altura  $h$  variando linealmente. En la [Figura 8.1](#), se modela considerando  $b_{01} = h_{01} = b_{12} = h_{12}$  y  $b_{02} = h_{02} = b_{11} = h_{11}$ .

La [Figura 8.5](#) muestra un esquema de los modelos a desarrollados.

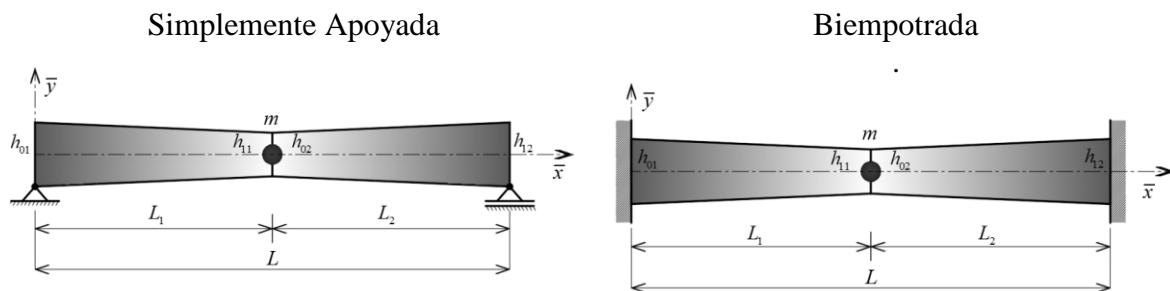


Figura 8.5: Vigas AFG con vinculación, geometría y propiedades de material simétricas.

### 8.5.3.3.a Viga AFG Simplemente Apoyada de dos tramos con y sin masa en el centro

Los primeros 5 coeficientes obtenidos se encuentran en las [Tablas 8.14](#) y [8.15](#).

$M$	0					1					Solución
$c_m$	0					0.1					
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
1.0	12.5188	34.0833	59.9576	74.2843	81.9485	6.39782	28.5479	43.4460	48.2983	79.2680	M.R-Ritz
	12.5188	34.0832	59.9574	74.2842	81.9485	6.38910	28.4106	42.9647	47.6632	79.0360	GDQM
	12.5202	34.0869	59.9640	74.2920	81.9570	6.38951	28.4131	42.9688	47.6669	79.0438	FEM
0.8	11.2362	32.5471	58.2497	77.6707	82.3548	5.38515	25.6431	41.0192	44.4046	79.0289	M.R-Ritz
	11.2361	32.5471	58.2496	77.6707	82.3548	5.37809	25.3857	40.5458	43.5358	78.9826	GDQM
	11.2370	32.5500	58.2553	77.6812	82.3654	5.37817	25.3866	40.5492	43.5386	78.9924	FEM
0.6	9.57594	30.3085	56.0621	79.4325	82.5392	4.22670	21.4070	37.8830	39.6373	79.5028	M.R-Ritz
	9.57426	30.3077	56.0612	79.4319	82.5373	4.22130	20.9412	37.4219	38.5796	79.4994	GDQM
	9.57452	30.3095	56.0657	79.4420	82.5475	4.22101	20.9401	37.4241	38.5812	79.5107	FEM
0.5	8.56530	28.8507	54.7407	78.6676	83.0462	3.59261	18.7481	35.9036	37.0303	79.7747	M.R-Ritz
	8.56276	28.8498	54.7384	78.6673	83.0437	3.58797	18.1407	35.4786	35.8805	79.7044	GDQM
	8.56263	28.8508	54.7420	78.6746	83.0570	3.58758	18.1386	35.4799	35.8813	79.7150	FEM
0.4	7.40514	27.0986	53.2449	77.0320	83.9712	2.92493	15.7527	33.6328	34.2662	79.7585	M.R-Ritz
	7.40051	27.0973	53.2387	77.0308	83.9685	2.91987	14.9776	32.9937	33.1746	79.4365	GDQM
	7.39991	27.0974	53.2413	77.0361	83.9838	2.91917	14.9741	32.9935	33.1747	79.4460	FEM
0.2	4.49476	22.2568	49.8260	71.6093	86.0179	1.51060	9.02649	27.4247	27.9305	77.1749	M.R-Ritz
	4.46017	22.2477	49.7603	71.5824	86.0152	1.49417	7.77956	26.0458	26.8051	75.3476	GDQM
	4.45825	22.2449	49.7605	71.5828	86.0305	1.49310	7.77386	26.0418	26.8011	75.3494	FEM

Tabla 8.14: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG simplemente apoyada de dos tramos –Caso C. Sin masa ( $M = 0$ ) y con masa adosada ( $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$ ) en  $x_m = 0.5$ .

$M$	0					1					Solución
$c_m$	0					0.1					
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
0.8	11.2317	32.4346	58.5683	77.3260	81.7595	5.07356	24.7485	39.9641	42.1879	78.8776	M.R-Ritz
	11.2305	32.4340	58.5680	77.3242	81.7572	5.06583	24.4212	39.4496	41.3871	78.8182	GDQM
	11.2313	32.4368	58.5738	77.3347	81.7678	5.06581	24.4216	39.4529	41.3897	78.8284	FEM
0.6	9.34821	29.5964	56.9010	79.5956	81.9555	3.61404	18.8663	35.6060	35.9995	79.5964	M.R-Ritz
	9.34566	29.5953	56.8994	79.5946	81.9537	3.60768	18.2460	35.0551	35.1658	79.5953	GDQM
	9.34585	29.5969	56.9042	79.6062	81.9634	3.60722	18.2437	35.0570	35.1673	79.6071	FEM
0.5	8.13790	27.6416	56.0073	79.1670	82.2230	2.86486	15.3839	32.9351	32.9396	80.0657	M.R-Ritz
	8.13339	27.6401	56.0039	79.1658	82.2205	2.85910	14.6175	32.0776	32.4017	80.0087	GDQM
	8.13311	27.6409	56.0082	79.1735	82.2353	2.85843	14.6140	32.0783	32.4026	80.0203	FEM
0.4	6.72801	25.2478	55.1737	77.5546	83.3459	2.12971	11.7983	29.7467	29.9586	80.0137	M.R-Ritz
	6.71840	25.2449	55.1616	77.5502	83.3433	2.12274	10.9020	28.8123	29.3317	79.6479	GDQM
	6.71754	25.2445	55.1651	77.5556	83.3603	2.12191	10.8977	28.8119	29.3312	79.6562	FEM
0.2	3.34779	18.5860	54.7456	72.4974	86.0720	0.82056	5.20261	22.2366	22.2630	76.4223	M.R-Ritz
	3.27412	18.5533	54.6412	72.4173	86.0646	0.79718	4.08617	20.7574	21.2203	74.8512	GDQM
	3.27183	18.5488	54.6449	72.4183	86.0716	0.79627	4.08140	20.7522	21.2149	74.8526	FEM

Tabla 8.15: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG simplemente apoyada de dos tramos –Caso D. Sin masa ( $M = 0$ ) y con masa adosada ( $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$ ) en  $x_m = 0.5$

Al ser la viga de dos tramos simétrica, surge el problema de que la función aproximante, propuesta en la [Tabla 8.1](#), arroja coeficientes de frecuencia pares si  $N_p$  es par e impares si  $N_p$  es impar. Al alternar la cantidad  $N_p$  (par o impar) en la sumatoria, sólo para las relaciones  $h_{11}/h_{01} = 1$  ([Tabla 8.14](#)) y  $h_{11}/h_{01} = 0.8$  ([Tablas 8.14](#) y [8.15](#)) sin masa adosada ( $M = 0$ ), los valores tabulados obtienen una solución satisfactoria.

En los demás casos (para  $M = 0$ ), sólo los coeficientes pares obtienen una buena precisión y para los impares hay que reducir el número de polinomios a  $N_p = 15$ , con lo que se pierde precisión. Como solución, para calcular las relaciones restantes (en ambas tablas, para  $M = 0$ ), se propone modificar la función aproximante del giro. Con lo cual, las funciones aproximantes resultan ser:

$$p_i(x) = (x-1)x^i \quad \text{y} \quad q_j(x) = 1 + (x-1)x^{j-1} \quad (8.107)$$

### 8.5.3.3.b Viga AFG Biempotrada de dos tramos con y sin masa en el centro

Los primeros 5 coeficientes obtenidos se encuentran en las [Tablas 8.16](#) y [8.17](#).

Para la viga biempotrada se procedió de igual que para la simplemente apoyada, es decir, alternando la cantidad  $N_p$  (par e impar) de términos en la sumatoria, para obtener los coeficientes pares e impares, respectivamente. Para este caso, no fue necesario recurrir a



modificar las funciones coordenadas, como se evidenció para la viga anterior.

$M$	0					1					Solución
$c_m$	0					0.1					
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
1.0	19.2907	37.1942	60.5682	83.8980	108.954	9.23404	29.6736	47.1298	52.9754	84.0476	M.R-Ritz
	19.2906	37.1942	60.5681	83.8979	108.954	9.20913	29.4934	46.7248	52.2240	84.0429	GDQM
	19.2930	37.1984	60.5748	83.9070	108.966	9.20976	29.4958	46.7295	52.2282	84.0519	FEM
0.8	19.4183	37.0996	59.2270	82.3510	107.864	8.55659	27.2519	45.8707	49.7650	83.4002	M.R-Ritz
	19.4183	37.0996	59.2269	82.3509	107.864	8.51868	26.7224	45.3003	48.3708	83.3077	GDQM
	19.4205	37.1036	59.2332	82.3596	107.875	8.51898	26.7234	45.3048	48.3745	83.3170	FEM
0.6	19.5531	36.6706	57.6153	80.1499	105.809	7.69673	22.9591	43.9232	45.6489	82.3645	M.R-Ritz
	19.5530	36.6706	57.6148	80.1498	105.809	7.66726	22.2646	43.5145	44.5763	82.1247	GDQM
	19.5549	36.6742	57.6205	80.1579	105.820	7.66711	22.2634	43.5185	44.5796	82.1338	FEM
0.5	19.6393	36.2822	56.6885	78.7439	104.371	7.19340	20.1827	42.7960	43.8334	81.5810	M.R-Ritz
	19.6379	36.2818	56.6830	78.7422	104.364	7.16468	19.3504	42.4176	42.8002	81.2079	GDQM
	19.6397	36.2851	56.6883	78.7495	104.375	7.16423	19.3478	42.4211	42.8033	81.2167	FEM
0.4	19.7564	35.7303	55.6586	77.0536	102.573	6.64319	17.5094	41.6534	42.6678	80.8023	M.R-Ritz
	19.7552	35.7287	55.6539	77.0465	102.567	6.59767	16.0181	41.0543	41.1181	79.9439	GDQM
	19.7568	35.7315	55.6586	77.0528	102.576	6.59688	16.0141	41.0567	41.1211	79.9518	FEM
0.2	20.2900	33.7960	53.3791	72.2185	97.5790	5.29573	10.7719	38.2721	39.4269	77.8650	M.R-Ritz
	20.2763	33.7887	53.3289	72.1935	97.4907	5.19232	8.35583	37.0905	37.4478	75.5045	GDQM
	20.2779	33.7895	53.3321	72.1962	97.4955	5.19065	8.34922	37.0906	37.4478	75.5080	FEM

Tabla 8.16: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG biempotrada de dos tramos – Caso C. Sin masa ( $M = 0$ ) y con masa adosada ( $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$ ) en  $x_m = 0.5$ .

$M$	0					1					Solución
$c_m$	0					0.1					
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
0.8	20.1926	37.7059	59.7035	82.3584	108.136	8.24649	26.1031	45.4591	47.8973	83.1473	M.R-Ritz
	20.1926	37.7059	59.7035	82.3584	108.136	8.21147	25.6286	44.9691	47.0122	83.0956	GDQM
	20.1949	37.7100	59.7099	82.3671	108.148	8.21160	25.6290	44.9734	47.0159	83.1046	FEM
0.6	21.3450	37.8045	58.9011	80.3736	106.618	7.03304	20.0712	43.6007	44.1384	81.9510	M.R-Ritz
	21.3446	37.8044	58.8997	80.3731	106.616	6.98918	19.2065	43.0734	43.3030	81.7693	GDQM
	21.3469	37.8081	58.9057	80.3812	106.627	6.98871	19.2043	43.0772	43.3065	81.7779	FEM
0.5	22.0959	37.6572	58.5795	79.1707	105.608	6.34266	16.5542	42.5867	42.8335	81.1840	M.R-Ritz
	22.0949	37.6569	58.5763	79.1695	105.604	6.29192	15.4120	41.9189	42.0291	80.8549	GDQM
	22.0973	37.6604	58.5821	79.1771	105.615	6.29114	15.4087	41.9220	42.0326	80.8629	FEM
0.4	23.0507	37.3424	58.3876	77.7762	104.456	5.60389	13.0023	41.5451	41.7313	80.2660	M.R-Ritz
	23.0474	37.3409	58.3763	77.7708	104.440	5.53469	11.5313	40.6524	40.8746	79.6819	GDQM
	23.0500	37.3440	58.3820	77.7778	104.449	5.53354	11.5269	40.6553	40.8776	79.6894	FEM
0.2	26.1333	36.0047	59.1331	74.0958	102.224	3.90519	5.80077	38.7481	39.0248	77.2320	M.R-Ritz
	26.1126	35.9779	59.0519	74.0230	102.066	3.78615	4.37834	37.8098	37.9358	75.9709	GDQM
	26.1171	35.9796	59.0589	74.0275	102.075	3.78421	4.37344	37.8109	37.9367	75.9752	FEM

Tabla 8.17: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG biempotrada de dos tramos – Caso D. Sin masa ( $M = 0$ ) y con masa adosada ( $M = 1$ ,  $c_m = 0.1$ ) en  $x_m = 0.5$ .

Respecto a los resultados obtenidos, en las [Tablas 8.14, 8.15, 8.16 y 8.17](#) se aprecia una correspondencia buena en los resultados obtenidos con los 3 métodos. Para los cálculos se introducen:  $N_p = 30$  términos de polinomios para el método de Rayleigh-Ritz,  $N_k = 23$  nodos (por tramo) en GDQM y  $n_e = 6000$  elementos en FEM.

De las [Tablas 8.14 y 8.15](#), se observa que los coeficientes de frecuencia disminuyen paralelamente a la sección del tramo central va disminuyendo haya o no masa adosada. En cambio, en las [Tablas 8.16 y 8.17](#) sucede algo diferente. Los coeficientes aumentan con la disminución de la sección, cuando la viga no posee masa adosada, y disminuyen cuando se adosa una masa en el tramo central. Este estudio evidencia el efecto que tiene considerar diferentes condiciones de borde en los extremos de la viga.

## 8.6 REFERENCIAS

- Bert, C.W. and Malik, M., Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures. *Composite Structures*, 39(3–4):179–189, 1997.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V. y Rossit, C.A. Diversos enfoques para el estudio del comportamiento dinámico de vigas Timoshenko AFG. *Mecánica Computacional*, XXXV: 2165–2185, 2017.
- Huang, Y., Yang, L. y Luo, Q. Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Composites: Part B*, 45:1493–1498, 2013.
- Karami, G., Malekzadeh, P., y Shahpari, S. A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures*, 25:1169–1178, 2003.
- Maiz, S., *Influencia de la inercia rotacional de una masa sobre las vibraciones transversales libres de elementos estructurales considerando diversas condiciones de apoyo*. Tesis de Magister en Ingeniería, 2006.
- Ozgumus, O.O. y Maya, M.O., Flap wise bending vibration analysis of a rotating double-tapered Timoshenko beam. *Archive of Applied Mechanics*, 78:389–392, 2008.
- Quintana, V. y Grossi, R., Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beams. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body*, 224:117, 2010.
- Rossi, R.E. *Introducción al análisis de Vibraciones con el Métodos de Elementos Finitos*. Edi UNS, 2007.

- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. y Hajilar S. Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part B*, 42:801–808, 2011.
- Shu, C. y Chen, W., On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):239-257, 1999.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Zhao, Y., Huang, Y. y Guo, M. A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory. *Composite Structure*, 168:277–284, 2017.

# **CAPÍTULO 9**

## **COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS TIMOSHENKO AFG CON VINCULACIÓN ELÁSTICA**

### **MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ**

### **MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADA (GDQM)**

### **MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (FEM)**

### **TEORÍA DE VIGAS DE TIMOSHENKO**

## 9.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos previos se ha tratado el estudio de vigas AFG considerando condiciones de borde clásicas. La realidad es que, en las estructuras resistentes, la vinculación del elemento depende del entorno estructural al que se encuentra unido. Por lo cual, los vínculos ideales rara vez representan su funcionamiento real. Es necesario, entonces, recurrir a la vinculación elástica para conferirle una mayor generalidad al modelo.

El estudio dinámico de vigas con extremos elásticamente restringidos a la rotación y/o traslación, constituye un problema estructural clásico. El mismo ha sido abordado por varios investigadores desde diferentes perspectivas y con distintas metodologías. Los primeros resultados se obtuvieron, por simplicidad, para la teoría de vigas Bernoulli-Euler, tratando de resolver analíticamente la ecuación diferencial de cuarto orden resultante con coeficientes variables.

El problema de la vibración libre de vigas Timoshenko con vínculos elásticos, fue resuelto por [Abbas \(1984\)](#) utilizando su propio modelo de elementos finitos ([Abbas, 1979](#)). [Rossi et al. \(1991\)](#) estudiaron las vibraciones de vigas Timoshenko de sección transversal no uniforme, elásticamente restringida en un extremo y soportando una masa concentrada en el otro. [Grossi y Aranda \(1993\)](#), aplicaron el método Ritz en la formulación variacional de vigas de Timoshenko con extremos elásticos restringidos. [Karami et al. \(2003\)](#), implementaron DQEM para el análisis de vibraciones de vigas no uniformes deformables por corte, con condiciones generales de contorno. [Kocatürk y Şimşek \(2005\)](#) resolvieron el problema por medio de las ecuaciones de Lagrange, para diferentes combinaciones de rigideces en los resortes. [Quintana y Grossi \(2010\)](#) hallaron mediante el método de Ritz estándar y una combinación del método de Ritz con multiplicadores de Lagrange, los coeficientes de frecuencia para vigas con restricciones elásticas intermedias y extremos elásticamente restringidos. [Bambill et al. \(2012b, a\)](#), implementaron un modelo de viga Timoshenko con vinculación elástica para estudiar vibraciones libres de vigas ahusadas y centrífugamente rigidizadas. Las soluciones las obtuvieron empleando FEM y GDQM. [Soares et al. \(2016\)](#) investigaron la influencia de la rigidez de los resortes sobre las vibraciones libres de vigas de sección uniforme y material homogéneo, empleando FEM y comparando sus resultados con la solución analítica.

[Shahba et al. \(2011\)](#) empleando FEM, hicieron un completo análisis de la estabilidad y vibración libre de vigas Timoshenko AFG de sección transversal ahusada. [Bambill et al. \(2014, 2015\)](#) estudiaron las vibraciones libres de vigas Timoshenko AFG escalonadas, empleando GDQM para resolver un modelo de viga con extremos elásticamente restringidos.

En este capítulo se estudia vibración transversal libre de vigas Timoshenko AFG con vinculación elástica en los extremos e incorporando, además, la variación de la sección transversal y la presencia de una masa concentrada en una posición arbitraria. En virtud de conducir a un sistema diferencial con coeficientes variables, el problema es resuelto mediante los tres métodos aproximados que se han desarrollado. Tal como se menciona en el capítulo 5, ante la presencia de singularidades en el dominio de la viga: geométricas, del material o bien una masa adosada, en general se requiere subdividir al dominio en dos tramos o partes.

## 9.2 GENERALIDADES DEL MODELO DE ANÁLISIS

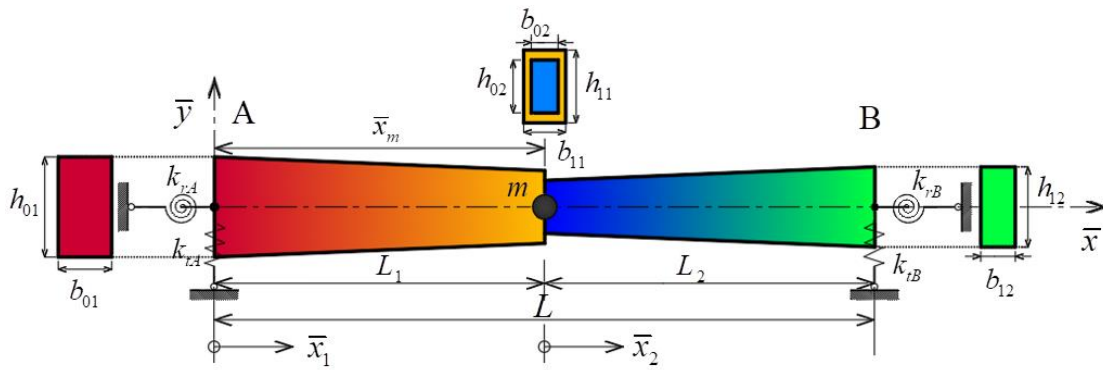


Figura 9.1: Viga AFG de dos tramos con vinculación elástica y masa adosada.

La [Figura 9.1](#) presenta una generalización del modelo de viga Timoshenko AFG empleado en el capítulo 8, considerando presentes las condiciones de vínculos elásticos en los extremos. Las mismas están representadas por resortes traslacionales y rotacionales, de constantes  $k_{tA}$  y  $k_{tB}$ ,  $k_{rA}$  y  $k_{rB}$  respectivamente. En la viga AFG, se denomina como extremo A al correspondiente a la coordenada  $\bar{x} = 0$  y como extremo B al correspondiente en  $\bar{x} = L$ .

Las ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento a flexión de la viga Timoshenko AFG se obtienen de aplicar el principio de Hamilton y seguir el procedimiento de [Banerjee \(2001\)](#). Las mismas se indican en las Ecs. (8.11) y (8.12).

Las condiciones de borde con vinculación elástica (ver Anexo 1), para todo tiempo  $t$ , son:

$$\begin{aligned} \bar{x} = 0: & \begin{cases} \kappa G \bar{x} A \bar{x} \left( \frac{\partial v \bar{x}, t}{\partial \bar{x}} - \psi \bar{x}, t \right) = k_{tA} v \bar{x}, t \\ E \bar{x} I \bar{x} \left( \frac{\partial \psi \bar{x}, t}{\partial \bar{x}} \right) = k_{rA} \psi \bar{x}, t \end{cases} \\ \bar{x} = L: & \begin{cases} \kappa G \bar{x} A \bar{x} \left( \frac{\partial v \bar{x}, t}{\partial \bar{x}} - \psi \bar{x}, t \right) = -k_{tB} v \bar{x}, t \\ E \bar{x} I \bar{x} \left( \frac{\partial \psi \bar{x}, t}{\partial \bar{x}} \right) = -k_{rB} \psi \bar{x}, t \end{cases} \end{aligned} \quad (9.1)$$

### 9.3 LEY DE VARIACIÓN PARA LAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS Y PROPIEDADES DEL MATERIAL

Se consideran dos tipos de distribuciones  $f_{Rk}(\bar{x}_k)$  para la variación de las características geométricas y del material, con  $\bar{x}_1 \in [0, L_1]$  y  $\bar{x}_2 \in [0, L_2]$ :

$$f_{R1}(\bar{x}_1) = 1 + \left( \frac{R_{11}}{R_{01}} - 1 \right) \left( \frac{\bar{x}_1}{L_1} \right)^{n_1}, \quad f_{R2}(\bar{x}_2) = 1 + \left( \frac{R_{12}}{R_{02}} - 1 \right) \left( \frac{\bar{x}_2}{L_2} \right)^{n_2} \quad \text{con } n_1 \geq 0 \text{ y } n_2 \geq 0 \quad (9.2)$$

$$f_{R1}(\bar{x}_1) = 1 + \left( \frac{R_{11}}{R_{01}} - 1 \right) \left( 2 - \frac{\bar{x}_1}{L_1} \right) \frac{\bar{x}_1}{L_1}, \quad f_{R2}(\bar{x}_2) = 1 + \left( \frac{R_{12}}{R_{02}} - 1 \right) \left( \frac{\bar{x}_2}{L_2} \right)^2. \quad (9.3)$$

La Ec. (9.2) corresponde a una ley axial asimétrica, donde  $n_1$  y  $n_2$  son los exponentes que indican el tipo de variación que tienen las características de la viga para cada tramo  $k$ -ésimo. Por su parte, la Ec. (9.3) corresponde a una ley axial simétrica.

En ambas leyes, las distribuciones  $f_{Rk}(\bar{x}_k)$  (de los parámetros geométricos y de las propiedades del material que componen a la viga) varían en la dirección axial de la viga, desde un valor inicial  $R_{0k}$  (coordenada  $\bar{x}_k = 0$ ) hasta un valor final  $R_{1k}$  (coordenada  $\bar{x}_k = L_k$ ), para cada tramo  $k$ -ésimo (con  $k = 1$  y  $2$ ),

En el caso de que se desee considerar una viga AFG de un único tramo, basta con reescribir a las Ecs. (9.2) y (9.3), como:

$$f_R(\bar{x}) = 1 + \left( \frac{R_{11}}{R_{01}} - 1 \right) \left( \frac{\bar{x}}{L} \right)^{n_1} \quad \text{con } \bar{x} \in [0, L] \text{ y } n_1 \geq 0 \quad (9.4)$$

$$f_R(\bar{x}) = 1 + 4 \left( \frac{R_{31}}{R_{01}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\bar{x}}{L} \right) \frac{\bar{x}}{L} \quad \text{con } \bar{x} \in [0, L] \quad (9.5)$$

donde  $R_{01}$  representa las características geométricas y del material en la sección transversal inicial de la viga (coordenada  $\bar{x} = 0$ ),  $R_{11}$  en la sección transversal final (coordenada  $\bar{x} = L$ ) y  $R_{31}$  en la sección transversal ubicada a la mitad del tramo (coordenada  $\bar{x} = L/2$ ).

### 9.4 MÉTODOS APROXIMADOS

#### 9.4.1 Método de Rayleigh-Ritz

Debido a que, en el presente modelo, los extremos de la viga se encuentran restringidos elásticamente, deben añadirse a la expresión de la energía máxima de deformación  $U_{\max}$  (Ec.

(8.4)) los términos correspondientes a la energía de deformación de los resortes traslacionales y rotacionales. De tal manera que  $U_{m\acute{a}x(2)}$  representa esa energía potencial, la cual expresada de forma independiente del tiempo  $t$  y en su forma adimensional (respecto a la longitud  $L$ ) es:

$$U_{m\acute{a}x(2)} = \frac{1}{2} \left\{ k_{tA} L^2 \left( V_a(x) \Big|_{x_1=0} \right)^2 + k_{rA} \left( \Psi_a(x) \Big|_{x_1=0} \right)^2 + k_{tB} L^2 \left( V_a(x) \Big|_{x_2=1} \right)^2 + k_{rB} \left( \Psi_a(x) \Big|_{x_2=1} \right)^2 \right\} \quad (9.6)$$

Para la energía cinética máxima  $T_{m\acute{a}x}$ , se considera a la Ec. (8.5). Reemplazando la Ec. (9.6) en la expresión del funcional  $J$  de energía (Ec. (8.6)), el mismo adopta esta nueva forma:

$$\begin{aligned} J[V_a(x), \Psi_a(x)] = & \int_0^{x_s} \left[ f_{E1} f_{I1} \left( \Psi_a' \right)^2 + \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} \left( V_a' - \Psi_a \right)^2 \right] dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left[ f_{E2} f_{I2} \left( \Psi_a' \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} \left( V_a' - \Psi_a \right)^2 \right] dx + K_{tA} \left( V_a \Big|_{x_1=0} \right)^2 + K_{rA} \left( \Psi_a \Big|_{x_1=0} \right)^2 + K_{tB} \left( V_a \Big|_{x_2=1} \right)^2 + \\ & + K_{rB} \left( \Psi_a \Big|_{x_2=1} \right)^2 - \Omega^2 \left\{ \int_0^{x_s} \left[ f_{\rho1} f_{A1} \left( V_a \right)^2 + \frac{f_{\rho1} f_{I1}}{S_{01}^2} \left( \Psi_a \right)^2 \right] dx + \right. \\ & \left. + C_\rho C_A \int_{x_s}^1 \left[ f_{\rho2} f_{A2} \left( V_a \right)^2 + \frac{f_{\rho2} f_{I2}}{S_{02}^2} \left( \Psi_a \right)^2 \right] dx + M \left[ \left( V_a \Big|_{x=x_m} \right)^2 + c_m^2 \left( \Psi_a \Big|_{x=x_m} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.7)$$

con

$$\begin{aligned} \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}}, S_{01} = L \sqrt{\frac{A_{01}}{I_{01}}}, S_{02} = L \sqrt{\frac{A_{02}}{I_{02}}}, \lambda = \frac{2(1+\mu)}{\kappa}, M = \frac{m}{\rho_{01} A_{01} L}, c_m = \frac{r_g}{L}, \Psi_a' = \frac{d\Psi_a}{dx}, V_a' = \frac{dV_a}{dx} \\ C_E = \frac{E_{02}}{E_{01}}, C_\rho = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}, C_A = \frac{A_{02}}{A_{01}}, C_I = \frac{I_{02}}{I_{01}}, K_{tA} = \frac{k_{tA} L^3}{E_{01} I_{01}}, K_{rA} = \frac{k_{rA} L}{E_{01} I_{01}}, K_{tB} = \frac{k_{tB} L^3}{E_{01} I_{01}}, K_{rB} = \frac{k_{rB} L}{E_{01} I_{01}}. \end{aligned}$$

Siguiendo con el método, se minimiza a la Ec. (9.7) respecto a cada constante arbitraria  $C_i$  y  $D_j$  (Ecs. (7.3)). Lo que da origen a un sistema de ecuaciones lineales, de forma análoga al mostrado en la Ec. (7.16). Y se prosigue como se indicó en el capítulo 8, con la salvedad que ahora los elementos  $k_{ij}$  que componen a la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_G$  adoptan la forma:

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} k_{ii} = & \int_0^{x_s} \left( \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} p_i' p_i' \right) dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left( \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} p_i' p_i' \right) dx + K_{tA} p_i \Big|_{x_1=0} p_i \Big|_{x_1=0} + K_{tB} p_i \Big|_{x_2=1} p_i \Big|_{x_2=1} \\ k_{ij} = & - \int_0^{x_s} \left( \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} p_i' q_j \right) dx - C_E C_I \int_{x_s}^1 \left( \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} p_i' q_j \right) dx \\ k_{ji} = & - \int_0^{x_s} \left( \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} q_j p_i' \right) dx - C_E C_I \int_{x_s}^1 \left( \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} q_j p_i' \right) dx \\ k_{jj} = & \int_0^{x_s} \left( f_{E1} f_{I1} q_j' q_j' + \frac{S_{01}^2}{\lambda} f_{E1} f_{A1} q_j q_j \right) dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 \left( f_{E2} f_{I2} q_j' q_j' + \frac{S_{02}^2}{\lambda} f_{E2} f_{A2} q_j q_j \right) dx + \\ & + K_{rA} q_j \Big|_{x_1=0} q_j \Big|_{x_1=0} + K_{rB} q_j \Big|_{x_2=0} q_j \Big|_{x_2=0} \end{aligned} \quad (9.8)$$



donde  $p_i(x)$ ,  $p_j(x)$ ,  $q_i(x)$  y  $q_j(x)$  son funciones coordenadas que deben satisfacer, al menos, las condiciones de borde esenciales (Ec. (7.3)). Las  $f_{rk}(x)$  con  $R = E, \rho, I, A$ , representan las funciones distribución de las características geométricas y del material.  $K_{tA}$ ,  $K_{tB}$ ,  $K_{rA}$  y  $K_{rB}$  son parámetros de rigidez adimensionales que relacionan a las constantes elásticas de los resortes (traslacionales y rotacionales) con la rigidez de la sección inicial.

Los elementos  $m_{ij}$  de la matriz de masa  $\mathbf{M}_G$ , coinciden con los definidos en la Ec. (8.9).

#### 9.4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)

La deducción de las ecuaciones diferenciales análogas de cuadratura (Ecs. (8.26) y (8.27)) y de las condiciones de continuidad (Ecs. (8.29), (8.31) (8.37) y (8.42)), para el modelo propuesto, se realizaron en el capítulo anterior. Por lo que sólo resta, obtener las condiciones de borde análogas de cuadratura (ver Anexo 1).

Considerando la Ec. (9.1), se deducen de las expresiones para el extremo A, de acuerdo al procedimiento explicado en el capítulo 8.

❖ Condición de borde natural que involucra al esfuerzo de corte (extremo A):

$$\kappa G_1(x) A_1(x) \left( \frac{L_1 \partial(V_1 \cos(\omega t))}{L_1 \partial x_1} - \Psi_1 \cos(\omega t) \right) = k_{tA} L_1 V_1 \cos(\omega t) \quad (9.9)$$

$$\frac{\kappa E_{01} A_{01}}{2(1+\mu)} f_{E1} f_{A1} (V_1' - \Psi_1) = k_{tA} L_1 V_1 \quad (9.10)$$

$$\frac{A_{01}}{\lambda L_1} f_{E1} f_{A1} (V_1' - \Psi_1) = \frac{k_{tA}}{E_{01}} V_1 \quad (9.11)$$

$$\frac{A_{01}}{\lambda L_1} f_{E1} f_{A1} (V_1' - \Psi_1) = \frac{k_{tA}}{E_{01}} V_1 \times \frac{L^3}{L^3} \frac{I_{01}}{I_{01}} \quad (9.12)$$

Se llega finalmente a:

$$\frac{S_{01}^2}{\lambda} \frac{L}{L_1} f_{E1} f_{A1} (V_1' - \Psi_1) = K_{tA} V_1 \quad (9.13)$$

❖ Condición de borde natural que involucra al momento flector (extremo A):

$$E_1(x) I_1(x) \frac{\partial(\Psi_1 \cos(\omega t))}{L_1 \partial x_1} = k_{rA} \Psi_1 \cos(\omega t) \quad (9.14)$$

$$\frac{E_{01} I_{01}}{L_1} f_{E1} f_{I1} \Psi_1' = k_{rA} \Psi_1 \quad (9.15)$$

$$\frac{1}{L_1} f_{E1} f_{I1} \Psi_1' = \frac{k_{rA}}{E_{01} I_{01}} \Psi_1 \times \frac{L}{L} \quad (9.16)$$

Se obtiene en definitiva:

$$\frac{L}{L_1} f_{E1} f_{I1} \Psi_1' = K_{rA} \Psi_1 \quad (9.17)$$

De manera análoga, se procede para el extremo B. Por lo que resultan:

❖ Condición de borde natural que involucra al esfuerzo de corte (extremo B):

$$\frac{S_{01}^2}{\lambda} \frac{L}{L_2} C_E C_A f_{E2} f_{A2} (V_2' - \Psi_2) = -K_{tB} V_2 \quad (9.18)$$

❖ Condición de borde natural que involucra al momento flector (extremo B):

$$\frac{L}{L_2} C_E C_I f_{E2} f_{I2} \Psi_2' = -K_{rB} \Psi_2 \quad (9.19)$$

Aplicando las reglas definidas por Bert y Malik (1997), a las Ecs. (9.13), (9.17), (9.18) y (9.19). Las mismas quedan expresadas como:

$$\frac{S_{01}^2}{\lambda} \frac{L}{L_1} \left[ v_{51}(x_{i1}) \left( \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} V_{i1} - \Psi_{i1} \right) \right]_{i=1} = K_{tA} V_{i1} |_{i=1} \quad (9.20)$$

$$\frac{L}{L_1} \left[ v_{61}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} B_{ij1}^{(1)} \Psi_{i1} \right]_{i=1} = K_{rA} \Psi_{i1} |_{i=1} \quad (9.21)$$

$$\frac{S_{01}^2 C_E C_A}{\lambda} \frac{L}{L_2} \left[ v_{52}(x_{i2}) \left( \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} V_{i2} - \Psi_{i2} \right) \right]_{i=N_2} = -K_{tB} V_{i2} |_{i=N_2} \quad (9.22)$$

$$C_E C_I \frac{L}{L_2} \left[ v_{62}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij2}^{(1)} \Psi_{i2} \right]_{i=N_2} = -K_{rB} \Psi_{i2} |_{i=N_2} \quad (9.23)$$

donde  $v_{5k}(x_{ik}) = f_{Ek} f_{Ak}$  y  $v_{6k}(x_{ik}) = f_{Ek} f_{Ik}$ ,  $k=1, 2$ , son los coeficientes de forma para las condiciones de borde análogas de cuadratura.

### 9.4.3 Método de Elementos Finitos (FEM)

Se emplea, para el desarrollo de los cálculos, el elemento viga Timoshenko de 2 nodos tratado en el capítulo 8. Implementando la misma metodología utilizada para adosar una masa puntual a la viga, es que se introducen las restricciones elásticas en los extremos. En este caso, se deben adicionar, a las correspondientes matrices elementales de rigidez (Ecs. (8.81) y

(8.82)), los términos de energía de deformación de los resortes. Más específicamente:

$$\begin{aligned}\bar{x} = 0 &: \left[ k_{e(1)} \right] + k_{tA} a_1^2 \left[ F_v(-1) \right]^t \left[ F_v(-1) \right] + k_{rA} \left[ F_\psi(-1) \right]^t \left[ F_\psi(-1) \right]; \\ \bar{x} = L &: \left[ k_{e(n_{e,2})} \right] + k_{tB} a_2^2 \left[ F_v(1) \right]^t \left[ F_v(1) \right] + k_{rB} \left[ F_\psi(1) \right]^t \left[ F_\psi(1) \right].\end{aligned}\quad (9.24)$$

## 9.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Algunos de resultados aquí presentados, son producto de las publicaciones de [Gilardi et al. \(2018b, a\)](#)

### 9.5.1 Verificación del modelo

Como primer paso de verificación, se emplean los casos de vigas AFG estables con condiciones de borde clásicas, planteados en el capítulo 8. Efectivamente, los valores de los coeficientes de frecuencia calculados coinciden exactamente con los expuestos en la [Tabla 8.9](#), y por ser idénticos no se transcriben aquí.

Para representar a los vínculos ideales, mediante los vínculos elásticos, se deben adoptar los siguientes valores de constantes elásticas en los extremos ([Figura 9.1](#)):

$$\begin{aligned}\text{Empotrado (E):} & \quad k_{tA,B} \rightarrow \infty \quad k_{rA,B} \rightarrow \infty \\ \text{Apoyado(A):} & \quad k_{tA,B} \rightarrow \infty \quad k_{rA,B} \rightarrow 0 \\ \text{Libre (L):} & \quad k_{tA,B} \rightarrow 0 \quad k_{rA,B} \rightarrow 0 \\ \text{Guiado(G):} & \quad k_{tA,B} \rightarrow 0 \quad k_{rA,B} \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (9.25)$$

Para la precisión, nuevamente se emplearon  $N_1 = 23$  nodos en GDQM,  $n_e = 2000$  elementos en FEM y para Rayleigh-Ritz,  $N_p = N_q = 20$  términos de polinomios.

Para el método de Rayleigh-Ritz se emplean como funciones coordenadas, en la Ec. (7.3), polinomios completos de segundo grado:

$$\begin{aligned}p_i(x) &= (c_1 x^2 + c_2 x + 1) x^{i-1} \\ q_j(x) &= (d_1 x^2 + d_2 x + 1) x^{j-1}\end{aligned}\quad (9.26)$$

donde  $c_1, c_2, d_1$  y  $d_2$  son coeficientes que se determinan de cumplir simultáneamente las condiciones de borde elásticas expuestas en la Ec. (9.1).

Para condiciones de contorno que conducen a vigas inestables, no se han encontrado resultados publicados para vigas Timoshenko AFG.

Para obtener una tener una primera comparación del modelo presentado en la [Figura 9.1](#), es

que se utilizan los coeficientes de frecuencia disponibles (en el libro de [Karnovsky y Lebed \(2001\)](#)) para vigas Bernoulli-Euler inestables, de un tramo, con material homogéneo y sección transversal constante.

La comparación es útil, además, para verificar que el modelo propuesto puede representar satisfactoriamente a la viga Bernoulli-Euler. Para esto, es necesario asignar un valor grande al parámetro de esbeltez. Se ha probado que para  $S_{01} = 2500$  los resultados obtenidos con la teoría de vigas de Timoshenko concuerdan con los que brinda la teoría de vigas de Bernoulli-Euler.

Para modelar la viga se consideran, además, los siguientes parámetros:  $\kappa = 5/6$  y  $\mu = 0.3$ .

La [Tabla 9.1](#) muestra los primeros 5 coeficientes de frecuencia, distintos de cero, para los casos de viga inestable indicados. En todos los casos, se han omitido los valores nulos correspondientes a los movimientos de cuerpo rígido.

La concordancia de los resultados obtenidos es excelente.

C.B.	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
L-L	22.3731	61.6716	120.899	199.846	298.526	M.R-Ritz
	22.3731	61.6716	120.899	199.846	298.526	GDQM
	22.3731	61.6716	120.899	199.846	298.526	FEM
	22.3733	61.6728	120.903	199.859	298.556	<a href="#">Karnovsky et al. (2001)</a>
L-A	15.4181	49.9640	104.244	178.259	272.006	M.R-Ritz
	15.4181	49.9640	104.244	178.259	272.006	GDQM
	15.4181	49.9640	104.244	178.259	272.006	FEM
	15.4182	49.9649	104.248	178.270	272.031	<a href="#">Karnovsky et al. (2001)</a>
L-G	5.59332	30.2255	74.6371	138.785	222.667	M.R-Ritz
	5.59332	30.2255	74.6371	138.785	222.667	GDQM
	5.59332	30.2255	74.6371	138.785	222.667	FEM
	5.59332	30.2258	74.6389	138.791	222.683	<a href="#">Karnovsky et al. (2001)</a>
G-G	9.86959	39.4779	88.8238	157.905	246.720	M.R-Ritz
	9.86959	39.4779	88.8238	157.905	246.720	GDQM
	9.86959	39.4779	88.8238	157.905	246.720	FEM
	9.86960	39.4784	88.8264	157.914	246.740	<a href="#">Karnovsky et al. (2001)</a>

Tabla 9.1: Coeficientes de frecuencia para condiciones de borde inestables. Vigas de sección constante con material homogéneo,  $S_{01} = 2500$ ,  $\kappa = 5/6$  y  $\mu = 0.3$ .

Finalmente, se presenta un caso de comparación más abarcativo. El modelo a comparar fue estudiado por [Shahba et al. \(2011\)](#) y corresponde a una viga Timoshenko AFG de sección transversal ahusada, con ancho constante  $b = b_{01}$  y altura  $h$  variando linealmente. La ley de variación que los autores adoptaron para la geometría es:

$$A(x) = A_{01}(1 - cx) ; I(x) = I_{01}(1 - cx)^3 \quad \text{con} \quad c = 0.5 \quad (9.27)$$

donde  $c$  es el coeficiente que indica la relación de estrechamiento y cuyo rango de variación es  $0 \leq c < 1$ . Para  $c = 0$  la viga es de sección uniforme y para  $c \rightarrow 1$  la viga es ahusada con sección tendiendo a cero en  $x = 1$ , lo cual constituye un límite teórico y no práctico.

El material AFG que compone a la viga está constituido por dos materiales: zirconia ( $\text{ZrO}_2$ ) y aluminio (Al), cuyas propiedades están especificadas en la Ec. (7.21) y varían de acuerdo a la ley de distribución axial asimétrica de la Ec. (9.4) con  $n_1 = 1$  y  $n_1 = 2$ .

La viga AFG posee al extremo izquierdo empotrado, el cual puede modelarse numéricamente adoptando a  $K_{tA} = K_{rA} = 1 \times 10^8$  (Ec. (9.7)) de acuerdo a Kocatürk y Şimşek (2005) y el extremo derecho con vinculación elástica, con  $K_{tB} = K_{rB}$ . Además, se deben considerar los parámetros:  $S_{01} = 10$  y  $\kappa = 5/6$  (por ser una sección rectangular maciza).

La Tabla 9.2 exhibe los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos para la viga AFG con un borde empotrado y el otro con vinculación elástica.

$n_1$	$K_{tB} = K_{rB}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1	0.1	4.57344	14.7879	29.0391	44.9902	61.8773	M.R-Ritz
		4.57344	14.7879	29.0391	44.9902	61.8773	GDQM
		4.57344	14.7879	29.0391	44.9902	61.8774	FEM
		4.5745	14.7948	29.0774	45.1234	—	Shahba et al. (2011)
	1	5.63133	16.1513	30.6199	46.7964	63.8098	M.R-Ritz
		5.63133	16.1513	30.6199	46.7964	63.8098	GDQM
		5.63133	16.1513	30.6199	46.7964	63.8098	FEM
		5.6326	16.1604	30.6660	46.9517	—	Shahba et al. (2011)
	10	8.71430	18.5650	32.3805	48.3086	65.1937	M.R-Ritz
		8.71429	18.5650	32.3805	48.3087	65.1937	GDQM
		8.71429	18.5650	32.3805	48.3087	65.1937	FEM
		8.7169	18.5780	32.4361	48.4822	—	Shahba et al. (2011)
2	0.1	4.53623	14.9553	29.5199	45.8574	63.1561	M.R-Ritz
		4.53623	14.9553	29.5199	45.8574	63.1561	GDQM
		4.53623	14.9553	29.5199	45.8574	63.1562	FEM
		4.5369	14.4957	28.5028	45.9942	—	Shahba et al. (2011)
	1	5.49744	16.2370	31.0175	47.5717	64.9794	M.R-Ritz
		5.49744	16.2370	31.0175	47.5717	64.9794	GDQM
		5.49744	16.2370	31.0175	47.5717	64.9795	FEM
		5.4986	16.2462	31.0647	47.7300	—	Shahba et al. (2011)
	10	8.38475	18.4994	32.7352	49.0757	66.3632	M.R-Ritz
		8.38474	18.4994	32.7352	49.0757	66.3632	GDQM
		8.38474	18.4994	32.7352	49.0757	66.3632	FEM
		8.3873	18.5128	32.7924	49.2531	—	Shahba et al. (2011)

Tabla 9.2: Coeficientes de frecuencia para viga AFG de sección ahusada. Con un borde empotrado y otro con vinculación elástica  $K_{tB} = K_{rB}$ .  $S_{01} = 10$ ,  $\kappa = 5/6$  y  $\mu = 0.3$ .

Se aprecia que la correlación entre resultados obtenidos es excelente, aunque difieren en relación con los valores que brindan Shahba et al. (2011). La diferencia se puede atribuir a que estos autores sólo emplearon  $n_{el} = 30$  elementos para FEM en la solución del problema. La precisión, para los métodos empleados, se obtiene de implementar  $N_p = 20$  términos de polinomios en Rayleigh-Ritz,  $N_1 = 23$  nodos en GDQM, y  $n_{el} = 2500$  elementos en FEM.

### 9.5.2 Casos Propuestos

Las generalidades del modelo brindan la libertad de variar diferentes parámetros geométricos, del material; e incluso las constantes elásticas de los resortes; por lo que sería factible estudiar una innumerable cantidad de casos.

Al no encontrar, en la bibliografía científica, valores de coeficientes de frecuencia para vigas Timoshenko AFG con vinculación inestable. Se propone, en primer lugar, completar el caso de comparación expuesto en la [Tabla 8.9](#), con algunas condiciones de bordes especiales (estables e inestables).

Seguidamente, se presenta el análisis dinámico de vigas constituidas por el material AFG propuesto por [Su et al. \(2013\)](#) ([Tabla 2.4](#)). El interés se enfoca en analizar vigas Timoshenko AFG con parámetro de esbeltez  $S_{01} = 100$  y factor de corrección por corte  $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 5/6$ .

La precisión en los resultados se obtiene en general de aplicar,  $N_p = 20$  términos de polinomios en Rayleigh-Ritz,  $N_1 = 23$  nodos en GDQM, y  $n_{el} = 2500$  elementos en FEM. En caso de que la precisión requiera que estos valores se modifiquen, los mismos se especificarán.

#### 9.5.2.1 Modelo de comparación con condiciones de borde especiales

El material AFG que constituye a la viga, se compone de la combinación de  $ZrO_2$ -Al, cuyas propiedades varían de acuerdo a la ley asimétrica (Ec. (9.4)) con  $n = 2$ . Las características geométricas varían de acuerdo a la Ec. (8.105) y para los vínculos se considera la Ec. (9.25)).

C.B.	Esquema	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
E-G		5.02912	18.1198	34.4510	51.8167	66.6036	M.R-Ritz
		5.02912	18.1198	34.4510	51.8166	66.6036	GDQM
		5.02912	18.1198	34.4510	51.8167	66.6036	FEM
A-G		2.01859	15.5667	33.0911	51.3759	59.8053	M.R-Ritz
		2.01859	15.5667	33.0911	51.3759	59.8053	GDQM
		2.01859	15.5667	33.0911	51.3760	59.8054	FEM
L-L		16.5511	33.3001	50.6019	59.6066	72.6755	M.R-Ritz
		16.5511	33.3001	50.6019	59.6066	72.6755	GDQM
		16.5511	33.3001	50.6020	59.6066	72.6755	FEM
A-L		12.6635	29.5292	47.2029	64.3574	72.6815	M.R-Ritz
		12.6635	29.5292	47.2029	64.3574	72.6815	GDQM
		12.6635	29.5292	47.2029	64.3575	72.6816	FEM
G-L		5.76045	20.8414	38.4271	55.4807	64.8920	M.R-Ritz
		5.76045	20.8414	38.4271	55.4807	64.8920	GDQM
		5.76045	20.8414	38.4271	55.4807	64.8921	FEM
G-G		7.94687	24.1429	42.2119	60.5274	67.1745	M.R-Ritz
		7.94687	24.1429	42.2119	60.5274	67.1745	GDQM
		7.94687	24.1429	42.2119	60.5274	67.1746	FEM

Tabla 9.3: Coeficientes de frecuencia para vigas AFG con condiciones de borde especiales.  $S_{01} = 100$ .

En la [Tabla 9.3](#), se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia para la combinación de vínculos ideales no estudiados y seguidamente para los inestables. Nuevamente se excluye el coeficiente fundamental de valor nulo, correspondiente a los movimientos de cuerpo rígido.

Los resultados obtenidos concuerdan muy bien para los 3 métodos empleados.

### 9.5.2.2 Vigas con ley de distribución asimétrica

Se propone estudiar vigas Timoshenko AFG de sección constante, con un extremo empotrado en  $\bar{x} = 0$  y con vinculación elástica en  $\bar{x} = L$ . Se consideran  $K_{tA} = K_{rA} = 1 \times 10^8$  para modelar las condiciones de infinita rigidez del extremo empotrado. Además, se emplea la composición Alum-Ac variando de acuerdo a la distribución definida en la Ec. (9.4), con  $n_1 = 1$ .

En las [Tablas 9.4](#) y [9.5](#) se indican los primeros 2 coeficientes de frecuencia obtenidos para distintas combinaciones de rigidez de los resortes en la condición de borde (en  $\bar{x} = L$ ). En ambas tablas, se observa una excelente concordancia en los resultados. La precisión en FEM, se alcanza empleando  $n_{e1} = 1000$  elementos. Se logran modelar los 4 vínculos de la Ec. (9.25),

(E):  $K_{tB} = K_{rB} = 1 \times 10^8$ , (A):  $K_{tB} = 1 \times 10^8$  y  $K_{rB} = 0$ , (G):  $K_{tB} = 0$  y  $K_{rB} = 1 \times 10^8$  y (L):  $K_{tB} = K_{rB} = 0$ .

$K_{rB}$	$10^8$		$10^6$		$10^4$		$10^2$		Solución
$K_{tB}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	
$10^8$	29.9962	82.2259	29.9962	82.2258	29.9925	82.2160	29.6357	81.2853	M.R-Ritz
	29.9962	82.2259	29.9962	82.2258	29.9925	82.2159	29.6356	81.2848	GDQM
	29.9962	82.2259	29.9962	82.2258	29.9925	82.2159	29.6356	81.2848	FEM
$10^6$	29.9952	82.2177	29.9951	82.2176	29.9914	82.2077	29.6346	81.2768	M.R-Ritz
	29.9952	82.2177	29.9951	82.2176	29.9914	82.2077	29.6346	81.2768	GDQM
	29.9952	82.2177	29.9951	82.2176	29.9914	82.2077	29.6346	81.2768	FEM
$10^4$	29.8911	81.3777	29.8911	81.3776	29.8874	81.3681	29.5337	80.4647	M.R-Ritz
	29.8911	81.3777	29.8911	81.3776	29.8874	81.3680	29.5337	80.4646	GDQM
	29.8911	81.3777	29.8911	81.3776	29.8874	81.3680	29.5337	80.4646	FEM
$10^2$	21.0458	46.3941	21.0458	46.3941	21.0450	46.3934	20.9684	46.3278	M.R-Ritz
	21.0458	46.3941	21.0458	46.3941	21.0450	46.3934	20.9684	46.3277	GDQM
	21.0458	46.3941	21.0458	46.3941	21.0450	46.3934	20.9684	46.3277	FEM
10	10.2898	40.8924	10.2898	40.8923	10.2898	40.8900	10.2832	40.6609	M.R-Ritz
	10.2898	40.8924	10.2898	40.8923	10.2898	40.8900	10.2832	40.6609	GDQM
	10.2898	40.8924	10.2898	40.8923	10.2898	40.8900	10.2832	40.6609	FEM
1	7.57327	40.4049	7.57327	40.4049	7.57299	40.4023	7.54524	40.1554	M.R-Ritz
	7.57327	40.4049	7.57327	40.4049	7.57299	40.4023	7.54523	40.1554	GDQM
	7.57327	40.4049	7.57327	40.4049	7.57299	40.4023	7.54523	40.1554	FEM
$10^{-1}$	7.23417	40.3571	7.23416	40.3571	7.23384	40.3545	7.20215	40.1058	M.R-Ritz
	7.23417	40.3571	7.23416	40.3571	7.23384	40.3545	7.20215	40.1058	GDQM
	7.23417	40.3571	7.23416	40.3571	7.23384	40.3545	7.20215	40.1058	FEM
0	7.19537	40.3518	7.19536	40.3518	7.19504	40.3492	7.16288	40.1004	M.R-Ritz
	7.19537	40.3518	7.19536	40.3518	7.19504	40.3492	7.16288	40.1003	GDQM
	7.19537	40.3518	7.19536	40.3518	7.19504	40.3492	7.16288	40.1003	FEM

Tabla 9.4: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG (con  $n_1 = 1$  en la Ec. (9.4)) uniforme. Con vinculación elástica.  $K_{tA} = K_{rA} = 1 \times 10^8$ ,  $K_{tB}$  y  $K_{rB}$  variables.  $S_{01} = 100$ ,  $\kappa = 5/6$  y  $\mu = 0.3$ .

$K_{rB}$	10		1		$10^{-1}$		0		Solución
$K_{tB}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	
$10^8$	27.3146	76.0744	22.5871	68.9843	21.0214	67.3556	20.8057	67.1521	M.R-Ritz
	27.3146	76.0743	22.5871	68.9842	21.0214	67.3555	20.8058	67.1520	GDQM
	27.3146	76.0743	22.5871	68.9842	21.0214	67.3555	20.8058	67.1520	FEM
$10^6$	27.3138	76.0681	22.5867	68.9807	21.0211	67.3526	20.8055	67.1492	M.R-Ritz
	27.3138	76.0680	22.5867	68.9807	21.0211	67.3526	20.8055	67.1492	GDQM
	27.3138	76.0680	22.5867	68.9807	21.0211	67.3526	20.8055	67.1492	FEM
$10^4$	27.2341	75.4393	22.5482	68.6289	20.9937	67.0607	20.7795	66.8646	M.R-Ritz
	27.2341	75.4392	22.5481	68.6289	20.9937	67.0607	20.7795	66.8646	GDQM
	27.2341	75.4392	22.5481	68.6289	20.9937	67.0607	20.7795	66.8646	FEM
$10^2$	20.4255	45.8751	18.9756	44.7759	18.3475	44.3471	18.2535	44.2853	M.R-Ritz
	20.4255	45.8751	18.9756	44.7759	18.3475	44.3471	18.2535	44.2853	GDQM
	20.4255	45.8751	18.9756	44.7759	18.3475	44.3471	18.2535	44.2853	FEM
10	10.2324	38.9784	10.0410	34.0176	9.91719	31.6822	9.89541	31.3241	M.R-Ritz
	10.2324	38.9784	10.0410	34.0176	9.91719	31.6822	9.89541	31.3241	GDQM
	10.2324	38.9784	10.0410	34.0176	9.91719	31.6822	9.89541	31.3241	FEM
1	7.32452	38.3350	6.40470	32.9189	5.71644	30.3604	5.58585	29.9686	M.R-Ritz
	7.32452	38.3351	6.40470	32.9189	5.71644	30.3604	5.58585	29.9686	GDQM
	7.32452	38.3350	6.40470	32.9189	5.71644	30.3604	5.58585	29.9686	FEM
$10^{-1}$	6.94909	38.2720	5.87094	32.8122	5.03096	30.2336	4.86714	29.8389	M.R-Ritz
	6.94909	38.2719	5.87094	32.8122	5.03096	30.2336	4.86714	29.8389	GDQM
	6.94909	38.2719	5.87094	32.8122	5.03096	30.2336	4.86714	29.8389	FEM
0	6.90590	38.2650	5.80804	32.8004	4.94799	30.2195	4.77959	29.8245	M.R-Ritz
	6.90590	38.2650	5.80803	32.8003	4.94799	30.2195	4.77959	29.8245	GDQM
	6.90590	38.2650	5.80803	32.8003	4.94799	30.2195	4.77959	29.8245	FEM

Tabla 9.5: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG (con  $n_1 = 1$  en la Ec. (9.4)) uniforme. Con vinculación elástica.  $K_{tA} = K_{rA} = 1 \times 10^8$ ,  $K_{tB}$  y  $K_{rB}$  variables.  $S_{01} = 100$ ,  $\kappa = 5/6$  y  $\mu = 0.3$ .

### 9.5.2.2 Vigas con ley de distribución Simétrica

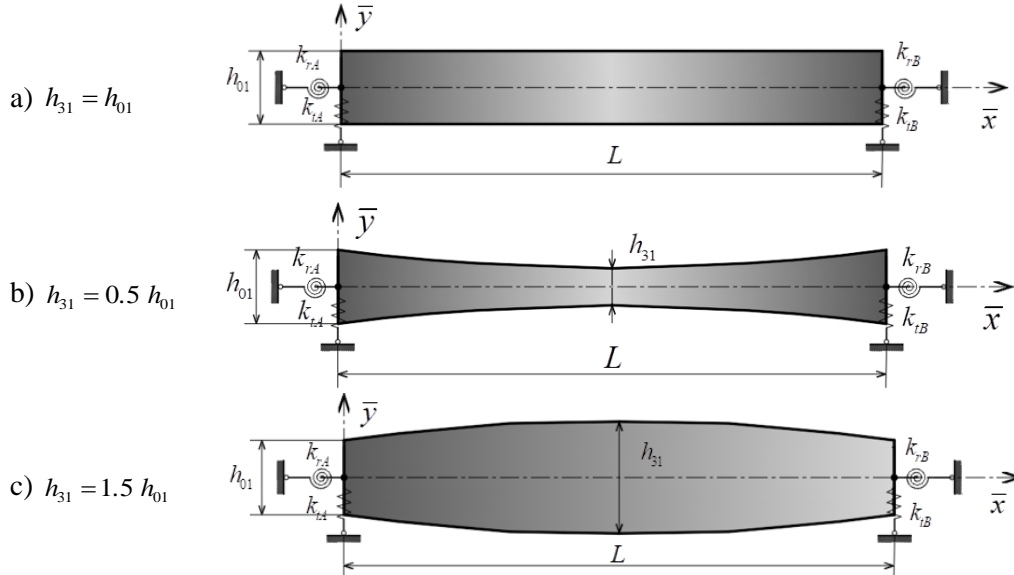


Figura 9.2: Casos de vigas con ley de variación simétrica (Ec. (9.5))  $k_{tA,B} \rightarrow \infty$  y  $k_{rA,B} \rightarrow 0$ .  $S_{01} = 100$ .

La bibliografía científica y los estudios desarrollados en capítulos previos para las teorías de viga de Bernoulli-Euler y de Timoshenko, evidencian que la variación de la sección



transversal de las vigas introduce modificaciones en los valores de sus frecuencias naturales.

Seguidamente, se desarrolla el estudio para las vigas Timoshenko simétricas (Figura 9.2), tanto en la geometría, como en el material y en la vinculación, respecto al eje  $\bar{y}$  en la coordenada  $\bar{x} = L/2$ . En cuanto a la geometría, se considera que la sección transversal posee ancho constante  $b = b_{01}$  a lo largo de la longitud  $L$  de la viga, mientras que la altura  $h$  puede variar de forma simétrica según la ley polinómica de segundo grado definida en la Ec. (9.5).

#### 9.5.2.2.a Vigas homogéneas simplemente apoyadas (A-A)

En la Tabla 9.6, se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos para los 3 casos representados en la Figura 9.2, para vigas constituidas únicamente por acero. Y de acuerdo con las Ecs. (9.25), la condición de vínculo ideal para los apoyos se obtiene de considerar  $k_{tA,B} \rightarrow \infty$  y  $k_{rA,B} \rightarrow 0$ .

Caso	$h_{31} / h_{01}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
a)	1	9.84961	39.1621	87.2544	153.067	235.265	M.R-Ritz
		9.84961	39.1621	87.2544	153.067	235.265	GDQM
		9.84961	39.1621	87.2544	153.067	235.265	FEM
b)	0.5	5.36446	24.0757	56.1379	100.031	155.520	M.R-Ritz
		5.36446	24.0757	56.1379	100.031	155.520	GDQM
		5.36446	24.0757	56.1379	100.031	155.520	FEM
c)	1.5	13.9653	52.1650	114.748	198.883	301.982	M.R-Ritz
		13.9653	52.1650	114.748	198.883	301.982	GDQM
		13.9653	52.1651	114.748	198.883	301.982	FEM

Tabla 9.6: Coeficientes de frecuencia para la viga (A-A) de material homogéneo (Ac).  $S_{01} = 100$ .

La correlación que se logra entre los 3 métodos es perfecta. Tomando como referencia a la viga uniforme a), para el caso b) el primer coeficiente decrece un 45% y los demás alrededor de un 35%. Para el caso c), en cambio, el coeficiente de frecuencia fundamental incrementa en un 42%, mientras que en promedio los restantes obtienen un 32%.

Por otra parte, se puede analizar la influencia que tiene el peso de la viga sobre los coeficientes de frecuencia naturales. Considerando al peso de la viga a) como referencia  $W_0 = \rho_0 g b_0 h_0 L$ , y el mismo valor de  $h_{01}$  para los otros dos casos, se obtiene que  $W_{b)} = 0.67 W_0$  y  $W_{c)} = 1.33 W_0$ . Por lo tanto, de acuerdo a los porcentajes expuestos en el párrafo anterior, se aprecia que la disminución o el aumento en los valores de los coeficientes de frecuencia son del mismo orden en que disminuye o incrementa el peso de la viga.

Seguidamente, se pretende que los 3 casos de viga homogénea modelados anteriormente, posean una misma magnitud de peso (igual a la viga uniforme). Para ello, se les asigna a los

casos b) y c) nuevos valores para  $h_{01}$  y  $h_{31}$ , pero conservando las relaciones establecidas de  $h_{31}/h_{01} = 0.5$  y  $1.5$ . Por lo tanto:

$$\text{Caso b*): } h_{01}^* = 1.5h_{01}, h_{31}^* = 0.75h_{01} \quad (9.28)$$

$$\text{Caso c*): } h_{01}^* = 0.75h_{01}, h_{31}^* = 1.125h_{01}$$

En la [Tabla 9.7](#), se presentan los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos, con los métodos desarrollados, para los casos b\*) y c\*).

Caso	$h_{31}/h_{01}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
b*)	0.5	8.04669	36.1136	84.2069	150.047	233.280	M.R-Ritz
		8.04669	36.1136	84.2069	150.047	233.280	GDQM
		8.04669	36.1136	84.2063	150.047	233.280	FEM
c*)	1.5	10.4740	39.1238	86.0610	149.162	226.487	M.R-Ritz
		10.4740	39.1238	86.0610	149.162	226.487	GDQM
		10.4740	39.1238	86.0610	149.162	226.487	FEM

Tabla 9.7: Coeficientes de frecuencia para la viga (A-A) de material homogéneo (Ac) con igual peso.  $S_{01} = 100$

De los resultados obtenidos en la [Tabla 9.7](#), se concluye que cambiar la forma de la viga no contribuye en forma efectiva a rigidizarla, e incluso el aumento de peso puede resultar perjudicial para el resto de la estructura.

#### 9.5.2.2.b Vigas AFG simplemente apoyadas (A-A)

Se evalúa la presencia del material AFG sobre los casos presentados en la [Figura 9.2](#), con  $k_{tA,B} \rightarrow \infty$  y  $k_{rA,B} \rightarrow 0$ . La ley de variación para las propiedades del material corresponde a la Ec. (9.5) y se emplea la composición Ac-Alum-Ac, por ser la que mejor rigidiza a la viga, según se ha demostrado en el capítulo 6. Los valores hallados, se exponen en la [Tabla 9.8](#).

Caso	$h_{31}/h_{01}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
a)	1	17.1099	61.1944	134.383	234.256	358.928	M.R-Ritz
		17.1099	61.1944	134.383	234.256	358.928	GDQM
		17.1099	61.1944	134.383	234.256	358.928	FEM
b)	0.5	9.39781	38.4923	88.8831	156.942	242.782	M.R-Ritz
		9.39781	38.4923	88.8831	156.942	242.782	GDQM
		9.39781	38.4923	88.8831	156.942	242.782	FEM
c)	1.5	24.0553	80.2770	174.352	300.670	455.568	M.R-Ritz
		24.0553	80.2770	174.352	300.670	455.568	GDQM
		24.0553	80.2770	174.352	300.670	455.568	FEM

Tabla 9.8: Coeficientes de frecuencia para la viga A-A de material AFG (Ac-Alum-Ac) con  $h$  variable.  $S_{01} = 100$ .

En comparación a la [Tabla 9.6](#), la viga del caso a) presenta un notable efecto de rigidización en sus coeficientes de frecuencia. El coeficiente fundamental obtiene un incremento del 74% y

el resto un 50%. El cálculo del coeficiente de peso de viga (Ec. (3.7)), arroja que  $W_{b(\text{AFG})} = 0.67$ , es decir, que la viga es un 33% más liviana en relación a la viga de acero y de sección uniforme.

Para el caso b) los coeficientes de frecuencia son bastante similares a los de la viga de acero de sección uniforme (Tabla 9.6). Y si bien están por debajo, se debe notar que se obtienen coeficientes de frecuencia naturales similares con menos de la mitad del peso ( $W_{b(\text{AFG})} = 0.45$ ).

Para el caso c) se logra la mejor rigidización dinámica. El coeficiente de frecuencia fundamental aumenta en un 144% y el resto duplica los de la viga de acero y sección uniforme. El coeficiente de peso de viga para este caso es  $W_{b(\text{AFG})} = 0.90$ .

Se puede concluir, en que la combinación es doblemente beneficiosa. La presencia mayoritaria de alúmina en la zona central de la viga, donde la viga presenta mayores curvaturas y desplazamientos, aumenta la energía potencial debido a su mayor rigidez y disminuye la energía cinética debido a su menor peso. Eso hace que en el balance energético los coeficientes de frecuencia naturales aumenten.

#### 9.5.2.2.c Vigas homogéneas y AFG con condiciones de borde generales

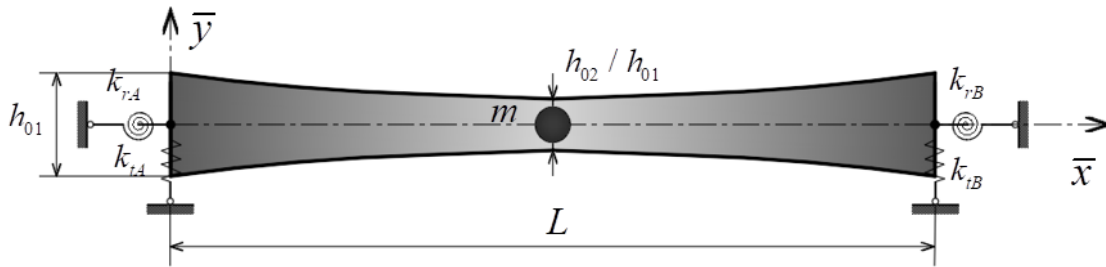


Figura 9.2: Casos de vigas con ley de variación simétrica (Ec. (9.3)).  $S_{01} = 100$ . Con masa  $M = 1$  en  $x_m = 0.5$ .

Se modelan 4 vigas simétricas, de sección transversal ahusada: con ancho constante  $b = b_{01}$  y altura  $h$  variando con la ley definida en la Ec. (9.3). Las alturas mantienen las siguientes relaciones  $(h_{11}/h_{01}) = 0.5$ ,  $h_{02} = h_{11}$  y  $h_{12} = h_{01}$ . Y para el material AFG, se considera la composición Ac-Alum-Ac, con propiedades variando según la Ec. (9.3).

En las Tablas 9.9 a 9.12 se indican los primeros 5 coeficientes calculados. Los coeficientes  $\Omega_{i,M}$ , indican la presencia de una masa puntual adosada en  $\bar{x} = L/2$ . Se elige  $M = 1$  con  $c_m = 0.1$  para la inercia rotacional de la masa. Para la vinculación se adoptan, para todos los casos a modelar, los siguientes parámetros de rigidez  $K_{tA} = K_{tB} = 1 \times 10^8$  y  $K_r = K_{rA} = K_{rB}$ .

La precisión de los resultados se obtiene de introducir  $N_k = 27$  nodos (por tramo) en GDQM, y  $n_e = 6000$  elementos en FEM.

$K_r$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	$\Omega_{4,M}$	$\Omega_{5,M}$	Sol.
$10^8$	22.1892	60.5187	117.001	190.134	278.543	11.7353	37.1847	93.1057	110.256	214.474	R-Ritz
	22.1892	60.5187	117.001	190.133	278.457	11.7305	35.1746	92.7610	96.1275	232.877	GDQM
	22.1892	60.5187	117.001	190.134	278.457	11.7305	35.1746	92.7609	96.1275	232.879	FEM
$10^4$	22.1805	60.4954	116.958	190.066	278.374	11.7327	35.6632	93.1645	107.154	240.015	R-Ritz
	22.1805	60.4954	116.958	190.066	278.362	11.7267	35.1687	92.7267	96.0968	232.796	GDQM
	22.1805	60.4954	116.958	190.066	278.362	11.7267	35.1687	92.7267	96.0968	232.796	FEM
$10^2$	21.3763	58.4143	113.170	184.311	270.789	11.3804	36.4703	90.0660	106.721	232.265	R-Ritz
	21.3763	58.4137	113.167	184.312	270.554	11.3756	34.6213	89.7383	93.4303	226.239	GDQM
	21.3763	58.4137	113.167	184.313	270.554	11.3756	34.6213	89.7381	93.4301	226.239	FEM
10	17.1804	49.3478	99.0518	165.654	248.186	9.45011	33.2959	78.1847	97.2701	212.885	R-Ritz
	17.1804	49.3476	99.0511	165.653	248.126	9.44643	31.7818	77.8372	83.0894	206.320	GDQM
	17.1804	49.3476	99.0511	165.653	248.126	9.44643	31.7818	77.8372	83.0894	206.320	FEM
1	11.5219	40.9542	89.0571	154.837	237.589	6.57537	29.3225	68.7611	89.7618	202.360	R-Ritz
	11.5219	40.9542	89.0569	154.836	236.977	6.57406	28.3248	68.4595	75.4678	195.759	GDQM
	11.5219	40.9542	89.0569	154.836	236.977	6.57406	28.3248	68.4595	75.4678	195.760	FEM
$10^{-1}$	10.0448	39.3563	87.4446	153.253	236.384	5.77716	28.4760	67.2758	88.8019	203.962	R-Ritz
	10.0448	39.3563	87.4443	153.251	235.441	5.77590	27.5621	66.8520	74.2301	194.270	GDQM
	10.0448	39.3563	87.4443	153.251	235.441	5.77590	27.5621	66.8520	74.2300	194.270	FEM
0	9.84961	39.1621	87.2545	153.068	236.265	5.66990	28.3715	66.9323	88.7077	200.101	R-Ritz
	9.84961	39.1621	87.2542	153.067	235.264	5.66911	27.4671	66.6605	74.0842	194.097	GDQM
	9.84961	39.1621	87.2542	153.067	235.264	5.66911	27.4671	66.6605	74.0842	194.097	FEM

Tabla 9.9: Coeficientes de frecuencia para la viga homogénea de sección constante y con vinculación elástica en los extremos.  $S_{01}=100$ . Sin masa  $M=0$  y con masa  $M=1$  en  $x_m=0.5$ .

$K_r$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	$\Omega_{4,M}$	$\Omega_{5,M}$	Sol.
$10^8$	18.6660	44.6958	82.4353	131.939	194.059	7.14064	17.8112	63.5689	74.6645	168.730	R-Ritz
	18.6660	44.6947	82.4167	131.671	192.061	7.12875	15.7811	62.6204	62.9330	159.655	GDQM
	18.6660	44.6948	82.4168	131.671	192.062	7.12783	15.7791	62.6124	62.9249	159.635	FEM
$10^4$	18.6615	44.6839	82.3964	131.986	193.419	7.13562	18.1594	63.2274	75.3406	163.116	R-Ritz
	18.6615	44.6824	82.3930	131.632	192.006	7.12814	15.7806	62.6115	62.9243	159.632	GDQM
	18.6615	44.6824	82.3930	131.633	192.006	7.12637	15.7786	62.5965	62.9084	159.592	FEM
$10^2$	18.2387	43.5259	80.2522	128.202	190.077	7.02435	17.2449	61.9037	68.4011	163.391	R-Ritz
	18.2381	43.5256	80.2142	128.204	187.164	7.01136	15.6747	60.9873	61.2473	155.531	GDQM
	18.2381	43.5257	80.2142	128.204	187.164	7.01024	15.6734	60.9817	61.2416	155.516	FEM
10	15.4172	36.9413	69.4579	116.860	170.624	6.20870	16.7145	53.5957	69.1850	156.346	R-Ritz
	15.4161	36.9099	69.5602	113.702	169.202	6.19035	14.9477	52.4038	52.4380	139.385	GDQM
	15.4161	36.9100	69.5603	113.702	169.202	6.18967	14.9466	52.4012	52.4359	139.374	FEM
1	8.83979	27.0215	58.6515	102.501	167.844	3.89179	14.6532	42.4067	54.2582	147.312	R-Ritz
	8.83935	27.0209	58.5184	102.156	157.483	3.88549	13.1910	41.3954	41.9681	127.814	GDQM
	8.83935	27.0209	58.5184	102.156	157.483	3.88536	13.1900	41.3927	41.9659	127.802	FEM
$10^{-1}$	5.87110	24.4192	56.5522	101.034	167.578	2.65924	13.7628	39.9882	52.6980	147.150	R-Ritz
	5.87047	24.4163	56.3945	100.255	155.724	2.65668	12.5152	38.9359	39.6967	126.005	GDQM
	5.87047	24.4163	56.3945	100.255	155.724	2.65643	12.5140	38.9325	39.6937	125.992	FEM
0	5.36459	24.1021	56.2995	104.721	167.610	2.43940	13.6246	39.6873	52.3448	147.158	R-Ritz
	5.36446	24.0757	56.1379	100.031	155.520	2.43727	12.4183	38.6285	39.4157	125.793	GDQM
	5.36446	24.0757	56.1380	100.031	155.520	2.43703	12.4171	38.6251	39.4127	125.780	FEM

Tabla 9.10: Coeficientes de frecuencia para la viga homogénea de sección ahusada y con vinculación elástica en los extremos.  $S_{01}=100$ . Sin masa  $M=0$  y con masa  $M=1$  en  $x_m=0.5$ .

$K_r$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	$\Omega_{4,M}$	$\Omega_{5,M}$	Sol.
$10^8$	35.3651	93.1286	178.343	288.524	421.425	15.1635	50.6081	138.062	161.565	358.929	R-Ritz
	35.3651	93.1286	178.343	288.521	421.406	15.1574	47.8232	137.413	141.598	351.564	GDQM
	35.3651	93.1286	178.343	288.521	421.406	15.1579	47.8246	137.428	141.611	351.600	FEM
$10^4$	35.3481	93.0841	178.261	288.395	421.233	15.1550	50.4906	137.573	156.290	355.551	R-Ritz
	35.3481	93.0841	178.261	288.395	421.233	15.1546	47.8189	137.381	141.569	351.490	GDQM
	35.3481	93.0841	178.261	288.395	421.234	15.1528	47.8167	137.366	141.555	351.456	FEM
$10^2$	33.8147	89.2166	171.393	278.192	407.692	14.6391	49.8314	132.373	153.125	345.646	R-Ritz
	33.8143	89.2132	171.378	278.164	407.649	14.6319	47.0337	131.941	136.525	339.781	GDQM
	33.8143	89.2132	171.378	278.164	407.649	14.6328	47.0357	131.955	136.539	339.815	FEM
10	26.7122	74.5020	149.377	249.984	374.719	12.0635	46.1065	113.806	141.518	317.558	R-Ritz
	26.7111	74.4932	149.355	249.947	374.699	12.0566	43.3837	113.146	119.522	309.796	GDQM
	26.7111	74.4931	149.355	249.947	374.699	12.0570	43.3854	113.157	119.532	309.826	FEM
1	19.0183	63.3294	136.510	236.355	360.977	8.93324	41.7420	101.300	131.534	303.571	R-Ritz
	19.0183	63.3292	136.509	236.335	360.925	8.93048	39.6660	100.784	108.935	296.448	GDQM
	19.0183	63.3292	136.509	236.335	360.925	8.93071	39.6681	100.795	108.945	296.481	FEM
$10^{-1}$	17.3237	61.4219	134.605	234.482	359.139	8.19743	40.9064	99.3468	130.577	301.854	R-Ritz
	17.3236	61.4217	134.604	234.470	359.130	8.19528	38.9307	98.8350	107.331	294.672	GDQM
	17.3236	61.4217	134.604	234.470	359.130	8.19557	38.9328	98.8459	107.340	294.704	FEM
0	17.1099	61.1944	134.383	234.266	358.932	8.10352	40.8053	99.1188	130.490	301.708	R-Ritz
	17.1099	61.1943	134.382	234.255	358.925	8.10142	38.8409	98.6058	107.143	294.469	GDQM
	17.1099	61.1942	134.382	234.255	358.925	8.10168	38.8429	98.6164	107.153	294.500	FEM

Tabla 9.11: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG (Ac-Alum-Ac) de sección constante y con vinculación elástica en los extremos.  $S_{01}=100$ . Sin masa  $M=0$  y con masa  $M=1$  en  $x_m=0.5$ .

$K_r$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_{1,M}$	$\Omega_{2,M}$	$\Omega_{3,M}$	$\Omega_{4,M}$	$\Omega_{5,M}$	Sol.
$10^8$	29.7735	69.5043	127.603	203.369	297.258	8.95020	24.5149	95.2883	114.930	252.897	R-Ritz
	29.7734	69.5044	127.596	203.350	296.100	8.94813	21.0281	95.1917	95.2798	245.521	GDQM
	29.7734	69.5043	127.596	203.350	296.100	8.94805	21.0276	95.1914	95.2796	245.507	FEM
$10^4$	29.7639	69.4786	127.559	203.239	294.836	8.95954	24.9358	95.9553	116.795	253.261	R-Ritz
	29.7638	69.4788	127.548	203.275	295.993	8.94713	21.0272	95.1704	95.2652	245.475	GDQM
	29.7638	69.4788	127.548	203.275	295.993	8.94518	21.0250	95.1579	95.2452	245.433	FEM
$10^2$	28.8555	67.1378	123.334	196.959	288.431	8.76980	24.7949	92.5334	113.645	242.104	R-Ritz
	28.8546	67.1349	123.311	196.777	287.019	8.75694	20.8597	91.9410	91.9667	237.767	GDQM
	28.8546	67.1348	123.311	196.777	287.019	8.75611	20.8584	91.9433	91.9693	237.770	FEM
10	23.3847	55.4135	105.935	174.967	272.824	7.54011	21.8498	77.7670	92.3696	225.604	R-Ritz
	23.3832	55.4070	105.677	173.757	259.411	7.52253	19.8125	76.8697	77.1701	212.445	GDQM
	23.3832	55.4070	105.677	173.758	259.411	7.52210	19.8115	76.8734	77.1740	212.449	FEM
1	13.4514	41.8611	92.1398	161.551	282.430	4.76791	20.5965	64.8161	85.7461	250.773	R-Ritz
	13.4499	41.8484	91.5397	159.338	245.007	4.75263	17.8446	62.0829	62.9035	198.007	GDQM
	13.4499	41.8484	91.5397	159.338	245.007	4.75234	17.8435	62.0848	62.9055	198.009	FEM
$10^{-1}$	9.93098	38.8788	89.9225	159.637	286.540	3.60502	19.7074	62.1973	83.7750	254.746	R-Ritz
	9.92945	38.8662	89.1641	157.192	243.011	3.59648	17.2375	59.2164	60.1912	195.940	GDQM
	9.92945	38.8662	89.1641	157.192	243.011	3.59622	17.2363	59.2174	60.1924	195.941	FEM
0	9.39935	38.5054	89.6668	159.462	287.135	3.42249	19.5924	61.8871	83.5915	255.316	R-Ritz
	9.39781	38.4923	88.8830	156.942	242.782	3.41480	17.1557	58.8673	59.8629	195.701	GDQM
	9.39781	38.4923	88.8830	156.942	242.782	3.41474	17.1545	58.8682	59.8639	195.702	FEM

Tabla 9.12: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG (Ac-Alum-Ac) de sección ahusada y con vinculación elástica en los extremos.  $S_{01}=100$ . Sin masa  $M=0$  y con masa  $M=1$  en  $x_m=0.5$ .

Se observa que cuando la viga no posee masa adosada se logra una mayor correlación en

los resultados obtenidos, pero cuando se adosa el método de Rayleigh-Ritz tiene una pequeña disparidad. Sin embargo, los resultados obtenidos siguen siendo cota superior de los valores buscados, lo cual permite dar certezas del buen funcionamiento de GDQM y FEM.

Por otra parte, en la [Tabla 9.13](#) se indican los porcentajes de rigidización (Ec. (6.37)) que se logran al emplear material AFG en los casos de vigas propuestos.

$K_r$	$\Omega_{1(\%)}$	$\Omega_{2(\%)}$	$\Omega_{3(\%)}$	$\Omega_{4(\%)}$	$\Omega_{5(\%)}$	$\Omega_{1,M(\%)}$	$\Omega_{2,M(\%)}$	$\Omega_{3,M(\%)}$	$\Omega_{4,M(\%)}$	$\Omega_{5,M(\%)}$	$A(\bar{x})$
$10^8$	59.38	53.88	52.43	51.75	51.30	29.21	36.10	48.28	46.54	67.35	Constante
$10^4$	59.37	53.87	52.41	51.73	51.32	29.23	41.58	47.67	45.86	48.14	
$10^2$	58.19	52.73	51.45	50.94	50.56	28.63	36.64	46.97	43.48	48.82	
10	55.47	50.97	50.81	50.91	50.98	27.63	38.48	45.56	45.49	49.17	
1	65.06	52.73	51.45	50.94	50.56	35.84	36.64	46.97	43.48	48.82	
$10^{-1}$	72.46	54.63	53.28	52.65	51.93	41.89	42.36	47.32	46.54	50.02	
0	73.71	56.07	53.93	53.00	51.93	42.90	43.65	47.67	47.04	48.00	
$10^8$	59.51	55.51	54.79	54.14	53.18	25.52	37.64	49.90	53.93	49.88	Ahusada (Ec.(9.3))
$10^4$	59.49	55.49	54.81	53.99	52.43	25.52	37.32	51.76	55.02	55.26	
$10^2$	58.21	54.25	53.68	53.63	51.74	24.90	43.78	49.48	66.15	48.17	
10	51.68	50.00	52.52	49.72	59.90	21.52	30.72	45.10	33.51	44.30	
1	52.16	54.25	53.68	53.63	51.74	22.32	43.78	49.48	66.15	48.17	
$10^{-1}$	69.14	54.92	57.10	57.61	68.27	35.37	40.56	52.84	58.03	70.23	
0	75.19	59.21	59.01	58.00	70.99	40.11	43.19	55.54	58.97	73.12	

Tabla 9.13: Porcentajes de rigidización al emplear material AFG en vigas Timoshenko con simetría en  $\bar{x}=L/2$ .

Se observa que la mayor rigidización dinámica se obtiene cuando la viga no posee masa adosada ( $M=0$ ), la sección transversal de viga es ahusada y  $K_{rA}=K_{rB}=0$ . O sea que corresponde a un caso de viga simplemente apoyada, en particular al caso b) de la [Figura 9.5](#).

Las diferencias numéricas que se aprecian para el caso de viga simplemente apoyada, entre la [Tabla 9.6](#) con las [Tablas 9.9](#) y [9.10](#), así como entre la [Tabla 9.8](#) con las [Tablas 9.11](#) y [9.12](#), para el método de Rayleigh-Ritz; se debe principalmente a que en las [Tablas 9.5](#) y [9.8](#), se emplearon como funciones aproximantes a los siguientes polinomios:

$$\{p_i(x)\}_{i=1}^{N_p} = \{(x-1)x^i\}_{i=1}^{N_p} \text{ y } \{q_j(x)\}_{j=1}^{N_q} = \{x^{j-1}\}_{j=1}^{N_q} \quad (9.29)$$

en la (Ec.(7.3)), por ser un caso de vínculos ideales en los extremos. La primera función corresponde para el desplazamiento  $v$  y la segunda para el giro  $\psi$ . Las mismas cumplen con las condiciones de bordes esenciales de la viga.

El hecho de que los valores no converjan a la misma solución, para el método de Rayleigh-Ritz, se puede asignar a que existe un problema de inestabilidad numérica debida a que en la matriz de rigidez global, se introducen parámetros de rigidez grandes para representar los

vínculos (apoyos) y paralelamente a la simetría problema, dado a que como puede apreciarse en las Tablas 9.4 y 9.5 donde se rompe la simetría tanto del material (ley asimétrica) como de las vinculaciones, los métodos aproximados no tienen casi diferencia.

De las Tablas 9.9 a 9.13, se aprecia que para el caso de las vigas biempotradas ( $k_{tA,B} \rightarrow \infty$  y  $k_{rA,B} \rightarrow \infty$ ) el método de Rayleigh-Ritz tiene menor error perceptual, frente a las demás rigideces propuestas, con respecto a los resultados obtenidos para GDQM y FEM. El error porcentual aumenta, en la medida que la rigidez a la rotación disminuye ( $k_{rA,B} \rightarrow 0$ ) y se hace máximo al llegar a la condición de apoyo (A). Allí numéricamente aparecen las diferencias entre los parámetros de rigidez y por ende las inestabilidades explicadas en el párrafo anterior.

Por otra parte, se observa en las Tablas 9.9 a 9.13 que el hecho de adosar una masa (a la mitad de la longitud de la viga) aumenta el error porcentual, para el coeficiente de frecuencia fundamental, que existe entre el método de Rayleigh-Ritz con relación a GDQM y FEM.

## 9.6 REFERENCIAS

- Abbas, B. A. H., Simple finite elements for dynamic analysis of thick pre-twisted blades Vibrations of Timoshenko beams with elastically restrained ends. *Aeronautical Quarterly*, 83: 450–453, 1979.
- Abbas, B. A. H., Vibrations of Timoshenko beams with elastically restrained ends. *Journal of Sound and Vibration*, 97(4): 541–548, 1984.
- Banerjee J.R., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 247:97–115, 2001.
- Bambill, D.V., Felix, D.H., Rossi, R.E. y Ratazzi, A.R., Free vibration analysis of centrifugally stiffened non uniform Timoshenko beams. (*Chapter 13:291-314*), Murat Gokcek (Editor). *Mechanical Engineering*, 2012a.
- Bambill, D.V., Rossit, C.A., Rossi, R.E., Ratazzi, A.R., Felix, D.H. y Gilardi, G. J., Vibraciones libres de vigas Timoshenko ahusadas y centrífugamente rigidizadas. *Mecánica Computacional*, XXXI: 2161–2180, 2012b.
- Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Vibraciones libres de viga de sección variable construidas con material funcionalmente graduado. *Actas XXXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Montevideo, Uruguay*, 2014.
- Bambill, D.V., Rossit, C.A. y Felix, D.H., Free vibrations of stepped axially functionally graded Timoshenko beams. *Meccanica*, 50, 1073–1087, 2015.

- Bert, C.W. y Malik, M., Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures. *Composite Structures*, 39(3–4):179–189, 1997.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Free vibrations of tapered AFG Timoshenko beams. (Chapter 1: 1–37). Yuen, J. (Editor), *Computational Mechanics (CM), Applications and developments*. New York Nova Science Publishers, 2018a.
- Gilardi, G.J., Rossit, C.A. y Bambill, D.V., Comportamiento dinámico de vigas Timoshenko AFG con vinculación elástica. *Mecánica Computacional*, XXXVI: 205–214, 2018b.
- Grossi, R. O. y Aranda, A., Formulación variacional de problemas de contorno para vigas Timoshenko. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 9(3):313–324, 1993.
- Karami, G., Malekzadeh, P. y Shahpari, S.A., A DQEM for vibration of shear deformable non-uniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures*, 25: 1169–1178, 2003.
- Karnovsky, I.A. y Lebed O.I., *Formulas for Structural Dynamics: Tables Graphs and Solutions*. McGraw-Hill, 2001.
- Kocatürk, T. y Şimşek, M., Free vibration analysis of elastically supported Timoshenko beams. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 3: 79–93, 2005.
- Quintana, V. y Grossi, R., Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beams. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body*, 224:117, 2010.
- Rossi, R.E., Gutiérrez, R. H. y Laura, P. A.A., Transverse vibrations of a Timoshenko beam of non-uniform cross section elastically restrained at one end and carrying a concentrated mass at the other. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89(5): 2456–2458, 1991.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. y Hajilar S., Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites: Part. B*, 42:801–808, 2011.
- Soares, A., Azevedo, A.C. y Hoefel, S. S., Dynamic analysis of elastically supported Timoshenko beam. *XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, 2016.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.



# **CAPÍTULO 10**

## **RIGIDIZACIÓN DINÁMICA DE VIGAS CANTILÉVER CON MATERIALES FUNCIONALMENTE GRADUADOS**

### **MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ**

### **MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADA (GDQM)**

### **MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (FEM)**

### **TEORÍA DE VIGAS DE TIMOSHENKO**

## 10.1 INTRODUCCIÓN

La optimización estructural de lograr elevar las frecuencias naturales de un elemento resistente mediante una adecuada remoción o redistribución de su masa original se conoce como rigidización dinámica. Específicamente, lo que se logra es una reducción del peso y paralelamente, un incremento de la rigidez dinámica global del mismo.

En muchas situaciones es necesario variar la sección transversal de la viga de manera de optimizar su rigidez, ya sea para evitar resonancias y/o reducir tensiones dinámicas. Existen tres caminos viables para lograr dicho efecto, el primero es mediante la reducción de la sección transversal de manera discontinua (*multi-steps beams* tal como se las conoce en inglés), el segundo es generando ahusamiento de la sección transversal (*tapered beams* tal como se las conoce en inglés) y el tercero resulta de la combinación de los dos anteriores.

El análisis de vibraciones de vigas escalonadas ha sido y sigue siendo de gran interés, desde el punto de vista de la rigidización dinámica. Debido a su importancia, diversos trabajos se han enfocado en optimizar la viga de manera discontinua. Se pueden citar, para la teoría de Bernoulli-Euler, los estudios de [Subramanian y Balasubramanian \(1987,1989\)](#) sobre vigas de sección circular, con escalón a la mitad de la longitud de la viga, para vinculación en ménsula y simplemente apoyada. [Laura et al. \(1991\)](#) pusieron principal énfasis en resaltar los beneficios en vigas de sección rectangular, en voladizo y biempotrada, mediante un estudio analítico (empleando FEM) y experimental. [Yuan y Dickinson \(1992\)](#) calcularon mediante el método de Rayleigh-Ritz las frecuencias naturales para vigas escalonadas de dos tramos y con varias condiciones de contorno. Particularmente, introdujeron un resorte traslacional y un rotacional, para modelar la unión entre las diferentes secciones transversales. [Ju et al. \(1994\)](#) incorporaron la viga escalonada con excentricidad y brindaron un importante resumen de las características de las vigas en escalón. [Felix et al. \(2006\)](#) estudiaron la optimización dinámica de vigas de dos y tres tramos empleando GDQM y la solución exacta; y [Rossit et al. \(2007\)](#), además, incorporaron la variación de la sección transversal ahusada y el efecto una masa adosada, haciendo uso del método de Rayleigh-Ritz.

En cuanto a la teoría de vigas de Timoshenko, [Tong et al. \(1995\)](#) obtuvieron coeficientes de frecuencia mediante una extensión del método de reducción del paso implementado por [Yeh et al. \(1992\)](#), para vigas con sección transversal escalonada y ahusada; y para diferentes condiciones de borde. [Mao \(2011\)](#) desarrolló un modelo de viga multi-escalonado, con vinculación elástica en sus extremos. Luego, aplicando el método de descomposición Adomian obtuvo los coeficientes de frecuencia para vigas con sección transversal escalonada

(rectangular y circular) y ahusada. [Torabi et al. \(2013\)](#) mediante el método de matriz de transferencia, estudiaron las vibraciones libres de vigas escalonadas con masas puntuales adosadas. [Gilardi et al. \(2014\)](#) presentaron la rigidización dinámica de vigas AFG rotantes y escalonadas, calculando los coeficientes de frecuencia mediante GDQM. [Bambill et al. \(2015\)](#), empleando DQM con la técnica de descomposición de dominio, estudiaron las vibraciones transversales libres de vigas AFG con cambios escalonados en la geometría y en las propiedades del material.

El presente capítulo tiene como finalidad estudiar la rigidización dinámica de vigas Timoshenko en voladizo, que vibran libremente, mediante la reducción de la sección transversal de manera discontinua y/o ahusada, y con una variación gradual en la dirección longitudinal de las propiedades del material (AFGM, por sus siglas en inglés).

## 10.2 GENERALIDADES DEL MODELO DE ANÁLISIS

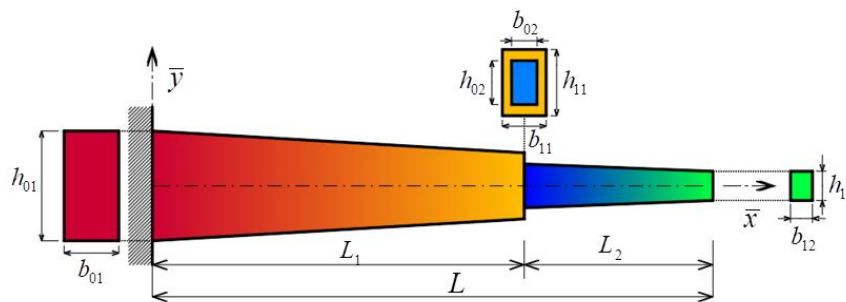


Figura 10.1: Viga AFG Timoshenko cantiléver de dos tramos ahusados.

La [Figura 10.1](#) presenta el modelo de viga Timoshenko AFG en voladizo de dos tramos ahusados, desarrollado para el presente estudio. Las características del modelo son análogas a las del modelo presentado en el [Figura 5.1](#), con la salvedad de que el presente modelo de viga no lleva adosado una masa en el extremo libre.

El sistema de ecuaciones diferenciales que rige el comportamiento a flexión de la viga Timoshenko AFG, se obtiene de aplicar el principio de Hamilton y seguir el procedimiento desarrollado por [Banerjee \(2001\)](#). Las mismas se presentaron en las Ecs. (8.11) y (8.12).

## 10.3 MÉTODOS APROXIMADOS

Para resolver los casos particulares del modelo propuesto en la [Figura 10.1](#), se emplean los 3 métodos aproximados (Rayleigh-Ritz, GDQM y FEM) que se han desarrollado en los capítulos previos de esta tesis. En particular, para estudiar las vigas escalonadas se emplean los métodos de GDQM y FEM por tener mejor precisión ante las discontinuidades frente al modelo

de Rayleigh-Ritz descrito en el capítulo 5. Y cuando la viga posee un solo un tramo y de sección transversal ahusada, se emplean los 3 métodos.

## 10.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Parte de los resultados, aquí expuestos, se publicaron en el trabajo de [Gilardi et al. \(2018\)](#).

### 10.4.1 Casos de comparación

#### 10.4.1.1 Viga de material homogéneo en voladizo de un tramo

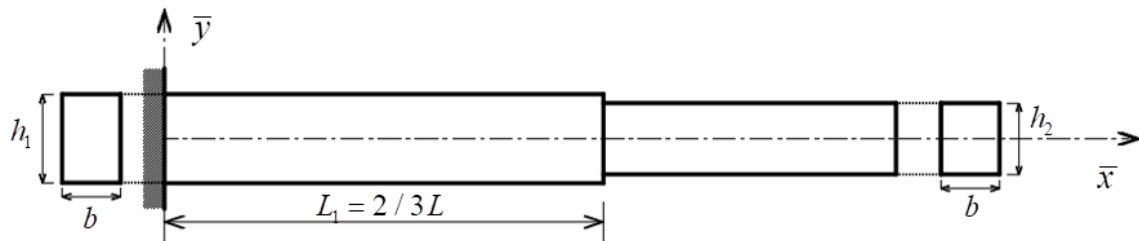


Figura 10.2: Viga cantiléver homogénea de dos tramos constantes. Escalón en  $L_1 = 2/3 L$ .

El primer caso de comparación, estudiado por [Tong et al. \(1995\)](#), corresponde a una viga Timoshenko escalonada en  $L_1 = 2/3 L$  y de sección transversal constante (Figura 10.2). El ancho es  $b = b_{01}$  en todo  $L$  y la altura  $h$  para cada tramo, es  $h_1 = h_{01} = h_{11}$  y  $h_2 = h_{02} = h_{12}$  con  $h_2 / h_1 = 0.8$ . Los parámetros que caracterizan a la viga son:  $\kappa = 5/6$ ,  $\mu = 0.3$  y  $S_{01}$  (variable).

La Tabla 10.1 presenta los primeros 5 coeficientes de frecuencia naturales.

$S_{01}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
75	3.82429	21.3548	55.0448	107.507	173.622	GDQM
	3.82426	21.3561	55.0472	107.508	173.630	FEM
	3.8219	21.3540	55.0408	107.499	173.632	<a href="#">Tong et al. (1995)</a>
37.5	3.80478	20.7295	51.6854	96.396	148.971	GDQM
	3.80476	20.7306	51.6876	96.396	148.976	FEM
	3.8034	20.7283	51.6851	96.392	148.965	<a href="#">Tong et al. (1995)</a>
25	3.77304	19.8047	47.3531	84.1407	125.065	GDQM
	3.77301	19.8057	47.3551	84.1409	125.068	FEM
	3.7716	19.8036	47.3540	84.1399	125.068	<a href="#">Tong et al. (1995)</a>

Tabla 10.1: Coeficientes de frecuencia para viga la cantiléver homogénea y escalonada en  $L_1 = 2/3 L$ , con tramos de sección constante.  $S$  variable.

Los coeficientes obtenidos tienen muy buena correlación con los resultados comparados. Se implementan en cada tramo,  $N_k = 23$  nodos en GDQM y  $n_{ek} = 1000$  elementos en FEM.

### 10.4.1.2 Viga AFG en voladizo:

Para el segundo caso de comparación, se utilizan los estudios de [Huang et al. \(2013\)](#) y [Zhao et al. \(2017\)](#). Se modela una viga cantiléver AFG, de un tramo y con sección transversal ahusada (ancho  $b$  constante y altura  $h$  variando linealmente). Las leyes de variación, que adoptaron estos autores para las características geométricas, son:

$$A(x) = A_{01}(1 - 0.1x) ; I(x) = I_{01}((1 - 0.1x))^3 . \quad (10.1)$$

El material AFG se compone de zirconia ( $ZrO_2$ ) y aluminio (Al) cuyas propiedades se especifican en la Ec. (7.21) y varían de acuerdo a la ley de distribución asimétrica definida en la Ec. (9.4) con  $n_1 = 1$  a 4. Los restantes parámetros que la caracterizan son:  $S_{01} = 10$  y  $\kappa = 5/6$ .

En la [Tabla 10.2](#), se exhiben los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos.

$n_1$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1	3.94464	14.9364	30.5727	46.4069	60.9420	GDQM
	3.94464	14.9364	30.5727	46.4069	60.9420	FEM
	3.94464	14.9364	30.5727	46.4089	—	<a href="#">Huang et al. (2013)</a>
	3.94470	14.9371	30.5745	46.4104	—	<a href="#">Zhao et al. (2017)</a>
2	3.93579	15.1533	31.2239	47.5836	62.7344	GDQM
	3.93579	15.1533	31.2239	47.5836	62.7344	FEM
	3.93579	15.1533	31.2239	47.5857	—	<a href="#">Huang et al. (2013)</a>
	3.93585	15.1540	31.2257	47.5871	—	<a href="#">Zhao et al. (2017)</a>
3	3.84950	15.1987	31.5933	48.2442	63.7301	GDQM
	3.84950	15.1987	31.5933	48.2442	63.7301	FEM
	3.84950	15.1987	31.5933	48.2467	—	<a href="#">Huang et al. (2013)</a>
4	3.77127	15.1970	31.8164	48.6325	64.3432	GDQM
	3.77127	15.1970	31.8164	48.6325	64.3432	FEM
	3.77127	15.1970	31.8164	48.6350	—	<a href="#">Huang et al. (2013)</a>

Tabla 10.2: Coeficientes de frecuencia para la viga AFG ( $ZrO_2 - Al$ ) con sección variable.  $S_{01} = 10$ .

Se aprecia que la concordancia entre los resultados es muy buena. La precisión se obtiene de adoptar  $N_1 = 23$  nodos en GDQM y  $n_{el} = 2000$  elementos en FEM.

## 10.4.2 Casos propuestos

### 10.4.2.1 Viga en voladizo escalonada

Con la finalidad de mostrar el efecto de rigidización dinámica que se logra sobre una viga de sección transversal constante y de material homogéneo, se propone analizar el efecto de disminuir la sección transversal de la viga, de manera escalonada, e implementar un material AFG para su composición.

El material AFG a implementar es el propuesto por [Su et al. \(2013\)](#), cuyas propiedades se

especifican en la [Tabla 2.4](#). Se emplea la composición alúmina (Alum)- acero (Ac) por ser una de las que optimiza la rigidización dinámica de viga.

Los casos que se proponen estudiar son:

- A: Viga de material homogéneo con escalón. (ver [Figura 10.3](#)).
- B: Viga de material AFG (Alum: 01-Ac: 11) en el primer tramo y el segundo tramo de acero (Ac) únicamente. Este modelo, presenta una discontinuidad geométrica (en escalón) para la altura. (ver [Figura 10.4](#)).
- C: Viga es de material AFG (Alum: 01-Ac:12), incorporando una discontinuidad geométrica (en escalón) para la altura. (ver [Figura 10.5](#)).

En los casos B y C, las propiedades del material AFG varían de acuerdo con la ley de distribución definida en la Ec. (9.2) con  $n_1 = n_2 = 1$ . Para los cálculos se considera ancho constante  $b = b_{01}$ , y dos tramos de altura constante  $h_1 = h_{01} = h_{11}$  y  $h_2 = h_{02} = h_{12}$ . Los demás parámetros que caracterizan a la viga son  $S_{01} = 100$  y  $\kappa = 5/6$ .

Vale aclarar que el parámetro de esbeltez  $S$ , de acuerdo con la Ec. (8.6), se definió para cada tramo. Por lo cual, si se desea caracterizar a la viga por el parámetro de esbeltez del primer tramo ( $S_{01}$ ), es necesario poner al segundo ( $S_{02}$ ) en función del primero ( $S_{01}$ ), es decir:

$$S_{01} = L \sqrt{A_{01} / I_{01}}, \quad S_{02} = L \sqrt{A_{02} / I_{02}} \quad \rightarrow \quad S_{02} = S_{01} (h_{01} / h_{02}) \quad (10.2)$$

Por otra parte, los valores de los coeficientes de frecuencia calculados son referenciados a los de una viga patrón homogénea constituida por acero y de sección constante (Ec. (8.106)).

Para la comparación, en primer lugar, se hallan los primeros 5 coeficientes de frecuencia para dos vigas de sección transversal constante, con  $h = h_1$ , una conformada por material homogéneo y otra de material AFG. Los valores obtenidos se muestran en la [Tabla 10.3](#).

$h_2 / h_1$	Material	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1	Homogéneo	3.51265	21.8889	60.7409	117.516	191.180	M.R-Ritz
		3.51265	21.8889	60.7409	117.516	191.180	GDQM
		3.51265	21.8889	60.7409	117.516	191.180	FEM
	AFG	4.77959	29.8245	82.9215	160.551	261.277	M.R-Ritz
		4.77959	29.8245	82.9215	160.551	261.277	GDQM
		4.77959	29.8245	82.9215	160.551	261.277	FEM

Tabla 10.3: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de sección constante.  $S_{01} = 100$ .

Se aprecia una excelente concordancia en los resultados obtenidos. Se emplean  $N_p = 20$  términos de polinomios en R-Ritz,  $N_1 = 23$  nodos en GDQM, y  $n_{e1} = 1000$  elementos en FEM.

Seguidamente, se presentan en la Tablas 10.4 a 10.9 los primeros 5 coeficientes de frecuencia obtenidos para los casos A, B y C, respectivamente.

En general, se logra una correlación muy buena en los resultados. Los coeficientes se obtienen de utilizar  $N_k = 23$  nodos en GDQM y  $n_{ek} = 2500$  elementos en FEM, en cada tramo.

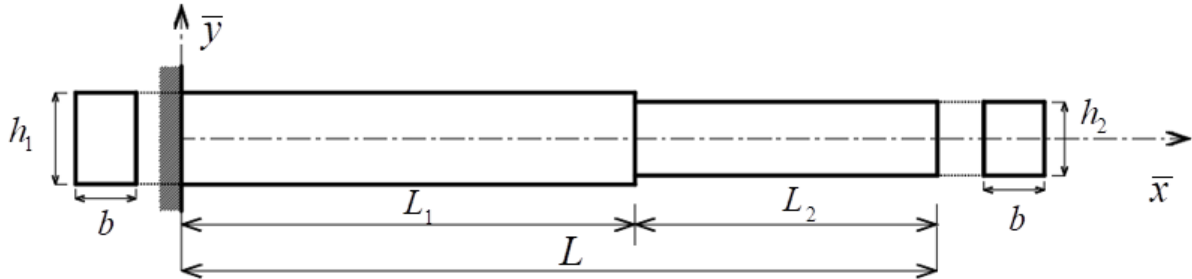


Figura 10.3: Caso A. Viga cantiléver homogénea (Ac) de dos tramos uniformes.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

$\frac{L_1}{L}$	$\frac{h_2}{h_1}$	0.9		0.8		0.7		0.6		0.5	
	Sol.	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM
3/4	$\Omega_1$	3.64030	3.64032	3.78245	3.78243	3.94191	3.94183	4.12213	4.12199	4.32725	4.32711
	$\Omega_2$	22.0558	22.0560	22.1992	22.1996	22.2790	22.2802	22.2031	22.2050	21.7546	21.7590
	$\Omega_3$	59.7187	59.7199	58.1087	58.1109	55.6648	55.6710	52.1666	52.1734	47.6497	47.6589
	$\Omega_4$	114.129	114.131	110.098	110.100	105.704	105.706	101.423	101.423	97.7206	97.7190
	$\Omega_5$	186.212	186.212	181.280	181.280	176.407	176.408	171.077	171.083	163.421	163.445
2/3	$\Omega_1$	3.66046	3.66044	3.82716	3.82709	4.01629	4.01623	4.23155	4.23156	4.47497	4.47497
	$\Omega_2$	21.7530	21.7534	21.4512	21.4522	20.8754	20.8780	19.8575	19.8609	18.1807	18.1869
	$\Omega_3$	58.4280	58.4293	55.6007	55.6027	52.3674	52.3705	48.9920	48.9938	45.8772	45.8774
	$\Omega_4$	113.488	113.488	109.528	109.529	105.561	105.562	101.098	101.104	94.7872	94.8066
	$\Omega_5$	185.485	185.487	178.528	178.536	169.476	169.495	157.857	157.876	144.722	144.741
1/2	$\Omega_1$	3.65819	3.65821	3.81280	3.81284	3.96902	3.96926	4.10697	4.10741	4.17781	4.17886
	$\Omega_2$	20.9424	20.9430	19.7326	19.7337	18.2626	18.2647	16.5841	16.5859	14.8218	14.8234
	$\Omega_3$	57.7260	57.7260	54.7559	54.7563	51.7035	51.7057	48.2341	48.2390	43.7292	43.7420
	$\Omega_4$	111.428	111.431	104.333	104.339	96.4077	96.4160	88.1622	88.1667	80.4143	80.4134
	$\Omega_5$	182.299	182.299	173.107	173.110	162.813	162.827	149.910	149.937	132.939	132.991
1/3	$\Omega_1$	3.58106	3.58118	3.61863	3.61862	3.60047	3.60119	3.49075	3.49184	3.24716	3.24890
	$\Omega_2$	20.5775	20.5775	19.2549	19.2549	17.9796	17.9792	16.8077	16.8070	15.7458	15.7451
	$\Omega_3$	56.8704	56.8722	52.5021	52.5056	47.6095	47.6162	42.2681	42.2742	36.7011	36.7070
	$\Omega_4$	110.215	110.216	102.664	102.667	94.4435	94.4546	84.9648	84.9821	73.7493	73.7804
	$\Omega_5$	178.407	178.409	165.203	165.204	151.968	151.967	138.752	138.753	124.410	124.431
1/4	$\Omega_1$	3.50878	3.50876	3.45441	3.45511	3.32852	3.32850	3.10976	3.11163	2.78343	2.78406
	$\Omega_2$	20.6140	20.6139	19.3828	19.3826	18.1917	18.1917	16.9803	16.9812	15.5789	15.5824
	$\Omega_3$	56.2979	56.2989	51.6226	51.6238	46.8419	46.8427	42.1414	42.1402	37.7398	37.7354
	$\Omega_4$	109.274	109.278	100.220	100.227	90.2735	90.2886	79.5198	79.5353	68.2694	68.2852
	$\Omega_5$	178.130	178.132	164.443	164.450	149.533	149.556	132.779	132.813	113.907	113.960

Tabla 10.4: Caso A. Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea de dos tramos de sección constante.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

$\frac{L_1}{L}$	$\frac{h_2}{h_1}$	0.4		0.3		0.2		0.1		0.05	
	Sol.	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM
3/4	$\Omega_1$	4.56166	4.56148	4.82710	4.82690	5.10188	5.10180	4.85546	4.85799	2.78492	2.78450
	$\Omega_2$	20.4384	20.4446	17.4349	17.4462	12.4487	12.4566	6.98257	6.98496	6.20096	6.20002
	$\Omega_3$	42.7597	42.7646	38.8442	38.8445	36.8933	36.8906	33.2625	33.2823	17.7089	17.7272
	$\Omega_4$	94.5705	94.5701	89.8301	89.8471	71.6111	71.6555	40.8257	40.8360	38.3464	38.3408
	$\Omega_5$	148.894	148.937	125.056	125.110	107.352	107.349	96.0111	96.0781	49.7397	49.7904
2/3	$\Omega_1$	4.73963	4.73976	4.97426	4.97485	4.85484	4.85659	3.07444	3.07735	1.57703	1.57679
	$\Omega_2$	15.6846	15.6907	12.4784	12.4850	9.23424	9.23637	7.71604	7.71457	7.60835	7.60717
	$\Omega_3$	43.3998	43.3983	41.4234	41.4232	36.5989	36.6141	20.1567	20.1763	10.1886	10.1981
	$\Omega_4$	84.1721	84.2023	68.1798	68.2192	52.1567	52.1638	46.8931	46.8893	27.7821	27.8109
	$\Omega_5$	133.216	133.216	125.292	125.285	107.831	107.889	57.4825	57.5305	48.1905	48.1824
1/2	$\Omega_1$	4.07343	4.07485	3.61438	3.61690	2.68019	2.68220	1.39787	1.39907	0.70267	0.70338
	$\Omega_2$	13.2009	13.2009	12.0303	12.0285	11.4038	11.4023	8.45727	8.46451	4.39036	4.39482
	$\Omega_3$	37.4839	37.4990	29.3679	29.3875	20.2423	20.2531	13.8655	13.8608	12.0039	12.0129
	$\Omega_4$	73.7278	73.7244	65.9756	65.9914	49.1642	49.1977	25.1579	25.1823	14.1997	14.1964
	$\Omega_5$	112.270	112.311	91.9044	91.9205	79.9427	79.9319	48.3746	48.4222	24.3023	24.3269
1/3	$\Omega_1$	2.83725	2.83928	2.26123	2.26227	1.55908	1.55908	0.78963	0.79044	0.39546	0.39585
	$\Omega_2$	14.6131	14.6143	12.7883	12.7942	9.47335	9.47861	4.93026	4.93533	2.47713	2.47960
	$\Omega_3$	31.3671	31.3675	27.0486	27.0419	23.4774	23.4779	13.7067	13.7203	6.93115	6.93804
	$\Omega_4$	60.8092	60.8376	46.7911	46.8182	33.6878	33.6892	25.7985	25.8106	13.5648	13.5782
	$\Omega_5$	106.270	106.313	82.9666	83.0284	56.3373	56.3692	31.6994	31.6865	22.3390	22.3603
1/4	$\Omega_1$	2.34940	2.35247	1.82509	1.82651	1.23996	1.24087	0.62442	0.62506	0.31249	0.31280
	$\Omega_2$	13.6913	13.6969	11.0503	11.0589	7.68803	7.69370	3.90775	3.91172	1.95800	1.95995
	$\Omega_3$	33.6559	33.6532	28.8499	28.8587	21.1365	21.1501	10.9205	10.9315	5.48108	5.48654
	$\Omega_4$	57.2136	57.2167	47.7654	47.7505	39.0464	39.0533	21.3294	21.3504	10.7369	10.7476
	$\Omega_5$	93.2462	93.2898	71.8362	71.8707	53.5220	53.5050	34.9862	35.0177	17.7399	17.7576

Tabla 10.4: Caso A. Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea de dos tramos de sección constante.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.



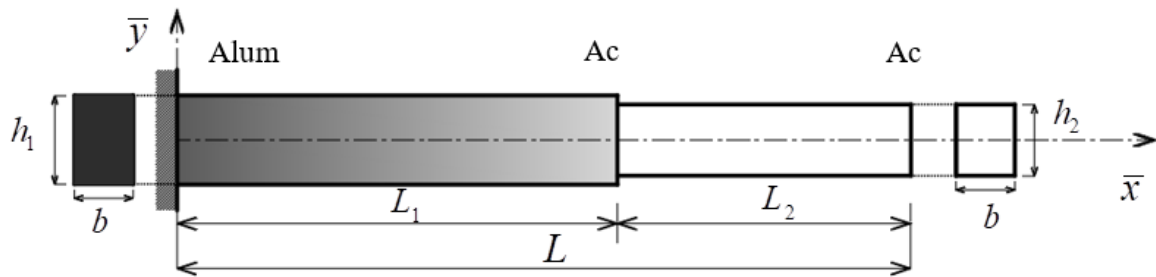


Figura 10.4: Caso B. Viga cantiléver de dos tramos de sección constante. Primer tramo AFG (Alum: 01-Ac: 11) y segundo tramo de acero (Ac).  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

$\frac{L_1}{L}$	$\frac{h_2}{h_1}$	0.9		0.8		0.7		0.6		0.5	
	Sol.	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM
3/4	$\Omega_1$	4.69135	4.63706	4.88353	4.88368	5.09991	5.09987	5.34517	5.34511	5.62443	5.62430
	$\Omega_2$	27.4352	27.4355	27.4465	27.4473	27.2787	27.2806	26.7532	26.7566	25.5233	25.5295
	$\Omega_3$	73.7734	73.7749	71.0485	71.0519	67.3730	67.3786	62.7885	62.7949	57.7248	57.7303
	$\Omega_4$	142.579	142.580	137.543	137.544	132.557	132.557	127.929	127.928	123.521	123.522
	$\Omega_5$	234.020	234.020	227.597	227.599	220.250	220.258	210.270	210.292	194.789	194.831
2/3	$\Omega_1$	4.63706	4.63706	4.85030	4.85033	5.09025	5.09027	5.35855	5.35860	5.64982	5.64997
	$\Omega_2$	25.9838	25.9844	25.3369	25.3384	24.2819	24.2848	22.6569	22.6612	20.3271	20.3327
	$\Omega_3$	70.5204	70.5213	66.9564	66.9579	63.2454	63.2466	59.6926	59.6927	56.5808	56.5797
	$\Omega_4$	138.669	138.669	133.546	133.548	127.708	127.714	120.064	120.080	109.053	109.081
	$\Omega_5$	224.999	225.003	214.656	214.665	202.367	202.380	189.111	189.120	176.827	176.826
1/2	$\Omega_1$	4.44773	4.44783	4.60537	4.60559	4.74475	4.74512	4.82865	4.82957	4.78287	4.78420
	$\Omega_2$	23.4774	23.4780	22.0359	22.0370	20.4011	20.4025	18.6689	18.6699	17.0042	17.0044
	$\Omega_3$	66.7144	66.7148	63.0302	63.0318	58.9453	58.9500	54.0232	54.0323	47.7763	47.7908
	$\Omega_4$	127.913	127.915	119.488	119.491	110.809	110.812	102.395	102.394	94.4763	94.4745
	$\Omega_5$	210.833	210.836	198.623	198.634	184.027	184.052	166.347	166.382	146.036	146.073
1/3	$\Omega_1$	4.11568	4.11567	4.09534	4.09528	3.99590	3.99580	3.78471	3.78463	3.43315	3.43332
	$\Omega_2$	22.5096	22.5095	21.2179	21.2176	19.9984	19.9978	18.8538	18.8534	17.6730	17.6738
	$\Omega_3$	61.4393	61.4408	56.4897	56.4929	51.1606	51.1648	45.6229	45.6263	40.1985	40.1989
	$\Omega_4$	120.779	120.781	111.760	111.766	101.708	101.722	90.3069	90.3282	77.5147	77.5407
	$\Omega_5$	196.553	196.553	182.269	182.269	167.615	167.620	151.730	151.747	133.089	133.128
1/4	$\Omega_1$	3.89997	3.89996	3.77565	3.77566	3.57061	3.57075	3.27213	3.27255	2.87659	2.87741
	$\Omega_2$	22.3339	22.3339	21.0904	21.0905	19.8196	19.8204	18.4019	18.4042	16.6328	16.6376
	$\Omega_3$	59.8154	59.8157	55.0438	55.0438	50.3114	50.3102	45.7640	45.7612	41.4210	41.4186
	$\Omega_4$	115.842	115.845	105.803	105.810	95.0944	95.1040	83.9564	83.9653	72.8730	72.8752
	$\Omega_5$	190.432	190.436	174.739	174.752	157.557	157.581	138.705	138.739	118.360	118.397

Tabla 10.6: Caso B. Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de dos tramos de sección constante. Primer tramo AFG (Alum: 01-Ac: 11) y segundo tramo de acero (Ac).  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

$\frac{L_1}{L}$	$\frac{h_2}{h_1}$	0.4		0.3		0.2		0.1		0.05	
	Sol.	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM
3/4	$\Omega_1$	5.94123	5.94112	6.28721	6.28716	6.56504	6.56547	5.27873	5.28234	2.79662	2.79622
	$\Omega_2$	23.0322	23.0408	18.8154	18.8254	13.2297	13.2368	8.71302	8.71288	8.37418	8.37298
	$\Omega_3$	53.0974	53.0989	49.9196	49.9172	48.1427	48.1409	34.9722	34.9984	17.7769	17.7915
	$\Omega_4$	117.714	117.726	104.034	104.077	75.7011	75.7461	52.8369	52.8318	48.4034	48.4330
	$\Omega_5$	172.584	172.627	151.192	151.202	141.157	141.146	98.9137	98.9913	53.6052	53.6082
2/3	$\Omega_1$	5.93155	5.93206	6.05791	6.05918	5.41750	5.42040	3.10951	3.10895	1.57890	1.57965
	$\Omega_2$	17.3072	17.3132	13.9304	13.9345	11.1671	11.1674	10.2652	10.2634	9.39905	9.40351
	$\Omega_3$	53.8613	53.8610	50.0468	50.0559	39.2260	39.2497	20.4050	20.4205	11.1910	11.1922
	$\Omega_4$	93.8905	93.9246	76.9037	76.9237	65.8365	65.8304	54.2910	54.3262	27.8457	27.8682
	$\Omega_5$	166.570	166.564	152.275	152.311	112.838	112.913	67.2584	67.2530	54.1470	54.1891
1/2	$\Omega_1$	4.48383	4.48630	3.80124	3.80068	2.72401	2.72427	1.40071	1.40185	0.70284	0.70347
	$\Omega_2$	15.6378	15.6366	14.7479	14.7457	13.7923	13.7936	8.62787	8.63485	4.39674	4.40064
	$\Omega_3$	39.9857	40.0032	31.0153	31.0308	22.1943	22.1995	18.0807	18.0746	12.2424	12.2529
	$\Omega_4$	85.7677	85.7783	71.7546	71.7903	50.2282	50.2631	25.5919	25.6108	18.7709	18.7628
	$\Omega_5$	125.589	125.606	109.941	109.927	92.1953	92.2349	48.6204	48.6614	24.4417	24.4622
1/3	$\Omega_1$	2.93078	2.93146	2.29502	2.29621	1.56624	1.56735	0.79009	0.79071	0.39549	0.39581
	$\Omega_2$	16.0945	16.0983	13.5059	13.5129	9.63211	9.63897	4.93976	4.94367	2.47771	2.47973
	$\Omega_3$	35.3957	35.3913	31.4811	31.4762	25.6381	25.6493	13.7781	13.7890	6.93458	6.94021
	$\Omega_4$	63.6970	63.7204	49.8993	49.9104	39.5841	39.5700	26.7204	26.7397	13.5794	13.5904
	$\Omega_5$	110.649	110.701	84.9678	85.0192	57.8603	57.8920	39.7184	39.7021	22.4183	22.4364
1/4	$\Omega_1$	2.39267	2.39380	1.83992	1.84116	1.24302	1.24389	0.62462	0.62513	0.31251	0.31277
	$\Omega_2$	14.2875	14.2942	11.2773	11.2848	7.73627	7.74172	3.91081	3.91401	1.95819	1.95985
	$\Omega_3$	36.7669	36.7707	30.3853	30.3995	21.4373	21.4524	10.9367	10.9457	5.48204	5.48670
	$\Omega_4$	62.6988	62.6899	53.8125	53.8052	41.0449	41.0670	21.3912	21.4087	10.7400	10.7492
	$\Omega_5$	97.1907	97.2186	77.0696	77.0684	62.1171	62.1017	35.2488	35.2768	17.7485	17.7635

Tabla 10.7: Caso B. Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver de dos tramos de sección constante. Primer tramo AFG (Alum: 01-Ac: 11) y segundo tramo de acero (Ac).  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

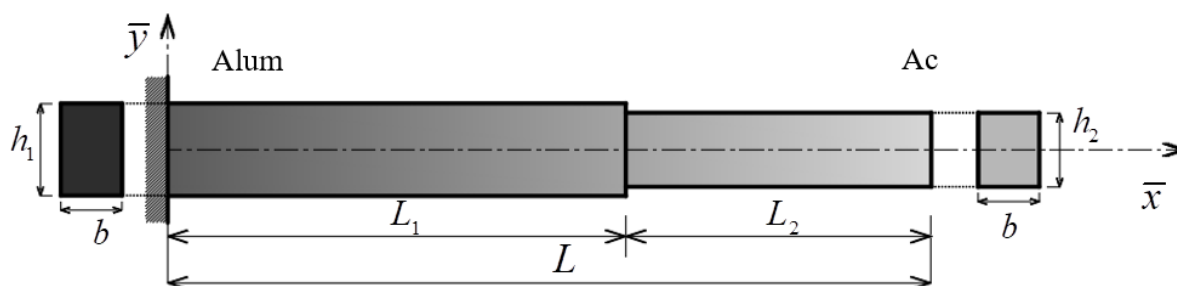


Figura 10.5: Caso C. Viga cantiléver AFG (Alum: 01-Ac: 12) con dos tramos de sección constante.

$S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

$\frac{L_1}{L}$	$\frac{h_2}{h_1}$	0.9		0.8		0.7		0.6		0.5	
		Sol.	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM
3/4	$\Omega_1$	4.96380	4.96390	5.17014	5.17035	5.40300	5.40342	5.66771	5.66852	5.97028	5.97025
	$\Omega_2$	29.9348	29.9354	29.9516	29.9528	29.7815	29.7838	29.2351	29.2393	27.9388	27.9455
	$\Omega_3$	80.8280	80.8310	77.8431	77.8483	73.7938	73.8014	68.7086	68.7176	63.0463	63.0536
	$\Omega_4$	155.326	155.330	149.742	149.746	144.217	144.220	139.098	139.100	134.259	134.262
	$\Omega_5$	254.514	254.518	247.556	247.562	239.626	239.638	228.865	228.894	212.116	212.165
2/3	$\Omega_1$	4.98643	4.98652	5.21951	5.21967	5.48294	5.48309	5.77951	5.77968	6.10542	6.10580
	$\Omega_2$	29.4188	29.4201	28.7076	28.7099	27.5396	27.5434	25.7250	25.7306	23.0983	23.1057
	$\Omega_3$	79.2513	79.2552	75.1500	75.1544	70.8663	70.8702	66.7520	66.7545	63.1431	63.1440
	$\Omega_4$	155.032	155.037	149.337	149.344	142.871	142.883	134.410	134.432	122.174	122.211
	$\Omega_5$	251.883	251.896	240.281	240.300	226.436	226.458	211.440	211.458	197.503	197.508
1/2	$\Omega_1$	4.96498	4.96525	5.15392	5.15438	5.32993	5.33065	5.45546	5.45654	5.45114	5.45285
	$\Omega_2$	28.3348	28.3375	26.5461	26.5494	24.5050	24.5085	22.3200	22.3230	20.1828	20.1847
	$\Omega_3$	78.7375	78.7428	74.4244	74.4308	69.6585	69.6681	63.9157	63.9302	56.5953	56.6158
	$\Omega_4$	151.243	151.257	141.126	141.140	130.687	130.699	120.551	120.559	111.034	111.040
	$\Omega_5$	248.614	248.634	234.321	234.350	217.179	217.223	196.340	196.395	172.325	172.380
1/3	$\Omega_1$	4.84079	4.84143	4.84923	4.84982	4.77121	4.77171	4.56345	4.56392	4.18247	4.18312
	$\Omega_2$	28.0335	28.0372	26.2741	26.2772	24.6028	24.6053	23.0434	23.0457	21.5010	21.5044
	$\Omega_3$	77.2438	77.2549	70.9782	70.9906	64.2035	64.2163	57.1240	57.1352	50.1204	50.1276
	$\Omega_4$	150.229	150.249	139.113	139.136	126.691	126.722	112.552	112.590	96.6362	96.6790
	$\Omega_5$	243.644	243.673	225.821	225.848	207.604	207.633	187.940	187.983	164.919	164.986
1/4	$\Omega_1$	4.73876	4.73950	4.62402	4.62474	4.41094	4.41175	4.07792	4.07892	3.61402	3.61547
	$\Omega_2$	28.0955	28.0999	26.4115	26.4156	24.7317	24.7363	22.9313	22.9369	20.7666	20.7749
	$\Omega_3$	76.7431	76.7562	70.4116	70.4231	64.0963	64.1058	57.9878	57.9941	52.1646	52.1701
	$\Omega_4$	148.641	148.668	135.732	135.761	121.925	121.956	107.519	107.545	93.0940	93.1121
	$\Omega_5$	242.845	242.886	222.969	223.016	201.139	201.199	177.124	177.189	151.159	151.227

Tabla 10.8: Caso C. Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum: 01-Ac: 12) con dos tramos de sección constante.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

$\frac{L_1}{L}$	$\frac{h_2}{h_1}$	0.4		0.3		0.2		0.1		0.05	
	Sol.	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM	GDQM	FEM
3/4	$\Omega_1$	6.31546	6.31543	6.69627	6.69632	7.01637	7.01691	5.74405	5.74821	3.06207	3.06162
	$\Omega_2$	25.2736	25.2832	20.6894	20.7010	14.5404	14.5488	9.42173	9.42182	9.00436	9.00302
	$\Omega_3$	57.8205	57.8234	54.1941	54.1924	52.1756	52.1742	38.0520	38.0828	19.3509	19.3684
	$\Omega_4$	127.968	127.983	113.234	113.285	82.4584	82.5117	57.2861	57.2809	52.5367	52.5719
	$\Omega_5$	187.927	187.978	164.408	164.423	153.295	153.285	107.461	107.553	58.1350	58.1398
2/3	$\Omega_1$	6.43020	6.43084	6.60931	6.61085	6.00114	6.00433	3.49502	3.49440	1.77791	1.77879
	$\Omega_2$	19.6585	19.6659	15.7621	15.7674	12.4731	12.4738	11.3232	11.3212	10.4389	10.4441
	$\Omega_3$	60.0147	60.0163	55.7705	55.7824	43.8461	43.8741	22.8293	22.8488	12.4203	12.4225
	$\Omega_4$	105.215	105.257	86.0648	86.0908	73.3788	73.3738	60.5164	60.5603	31.0609	31.0892
	$\Omega_5$	185.879	185.879	169.881	169.929	125.962	126.050	74.9351	74.9305	60.3511	60.4039
1/2	$\Omega_1$	5.17287	5.17540	4.44467	4.44434	3.21686	3.21729	1.66115	1.66254	0.83398	0.83476
	$\Omega_2$	18.3741	18.3741	17.1490	17.1477	15.9885	15.9907	10.1345	10.1430	5.17471	5.17953
	$\Omega_3$	47.4065	47.4300	36.7646	36.7847	26.2007	26.2086	21.0319	21.0259	14.3680	14.3809
	$\Omega_4$	100.708	100.727	84.3320	84.3784	59.0886	59.1333	30.0991	30.1223	21.8456	21.8370
	$\Omega_5$	148.036	148.066	129.242	129.235	108.186	108.240	57.0968	57.1469	28.6991	28.7247
1/3	$\Omega_1$	3.60403	3.60520	2.84207	2.84381	1.94747	1.94900	0.98396	0.98486	0.49263	0.49310
	$\Omega_2$	19.5877	19.5940	16.5402	16.5503	11.8772	11.8866	6.11005	6.11564	3.06592	3.06885
	$\Omega_3$	43.8045	43.8050	38.6012	38.5998	31.4582	31.4739	17.0085	17.0240	8.56616	8.57435
	$\Omega_4$	79.3995	79.4374	62.1115	62.1325	48.8381	48.8267	32.9454	32.9730	16.7671	16.7832
	$\Omega_5$	137.175	137.256	105.360	105.436	71.7544	71.7997	48.8658	48.8495	27.6743	27.7007
1/4	$\Omega_1$	3.02568	3.02745	2.33713	2.33904	1.58283	1.58409	0.79612	0.79689	0.39836	0.39874
	$\Omega_2$	17.9240	17.9345	14.2236	14.2352	9.79318	9.80098	4.95803	4.96282	2.48302	2.48535
	$\Omega_3$	46.1298	46.1405	38.2135	38.2363	27.0869	27.1084	13.8488	13.8622	6.94358	6.95009
	$\Omega_4$	79.6666	79.6689	67.8351	67.8363	51.7839	51.8164	27.0781	27.1040	13.6003	13.6131
	$\Omega_5$	124.098	124.150	98.217	98.231	78.4453	78.4374	44.6080	44.6497	22.4733	22.4943

Tabla 10.9: Caso C. Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum: 01-Ac: 12) con dos tramos de sección constante.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

Los gráficos de las Figuras 10.6, 10.7 y 10.8, presentan al coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$  versus la relación de alturas  $h_2/h_1$  para las distintas relaciones  $L_1/L$  expuestas en las tablas anteriores. El efecto de rigidización dinámica que se observa es que, en todos los casos, para  $L_1/L = 3/4$  se obtiene la mayor rigidización y que además, para relaciones  $h_2/h_1 < 0.2$ ,  $\Omega_1$  decrece bruscamente debido a los cambios en la rigidez y en la masa de la viga. Para relaciones  $L_1/L < 1/3$  y  $h_2/h_1 < 0.7$ , si la viga es homogénea no se produce rigidización dinámica (Figura 10.6). Sin embargo, al considerar el material AFG propuesto, sí se observa el efecto de rigidización dinámica (Figuras 10.7 y 10.8).

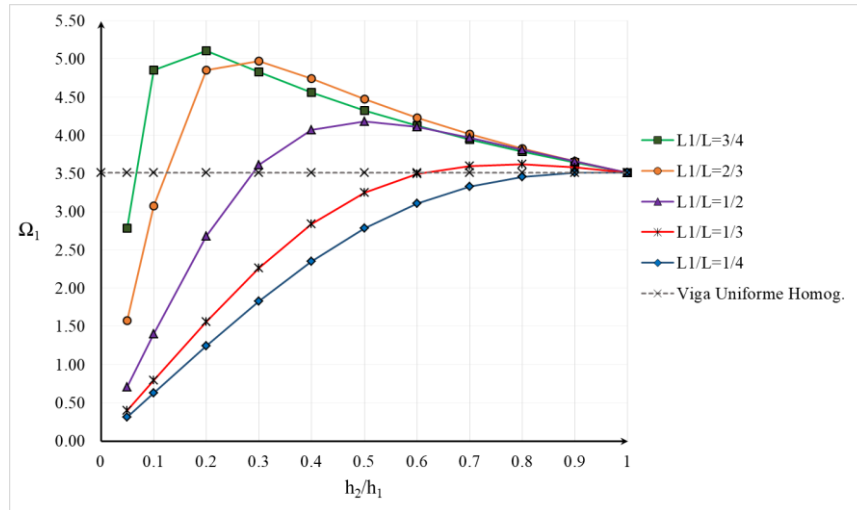


Figura 10.6: Coeficiente fundamental. Caso A. Viga cantiléver homogénea de dos tramos uniformes.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

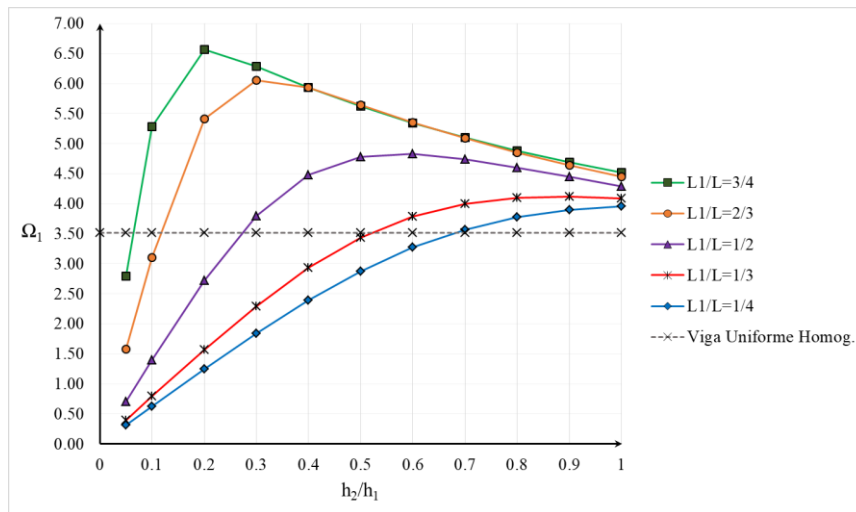


Figura 10.7: Coeficiente fundamental. Caso B. Viga cantiléver de dos tramos de sección constante. Primer tramo AFG (Alum: 01-Ac: 11) y segundo tramo de acero (Ac).  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

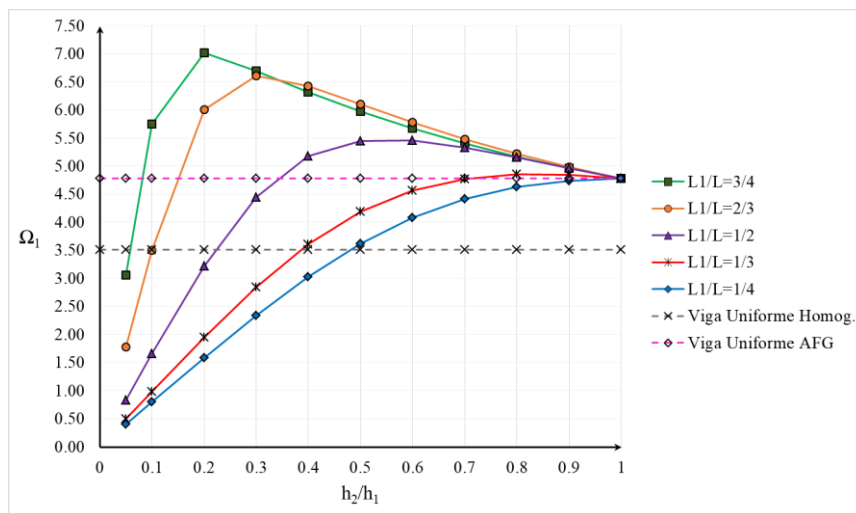


Figura 10.8: Coeficiente fundamental .Caso C: Viga cantiléver AFG (Alum: 01-Ac: 12) con dos tramos de sección constante.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

En general, se aprecia que para cada relación  $L_1 / L$  existen relaciones alturas  $h_2 / h_1$  para las cuales la viga no se rigidiza dinámicamente. Cuanto más lejos del empotramiento está el escalón se obtiene una mejor rigidización y un mayor rango de alturas que rigidizan.

Las tablas y gráficos mencionados precedentemente se complementan con los gráficos del factor de eficiencia de rigidización  $\eta$ , Figuras 10.9, 10.10 y 10.11. El cual se expresa como de acuerdo a Laura et al. (2001) como:

$$\eta = \frac{\Omega_1 / \Omega_{01}}{\Delta m} \quad (10.3)$$

donde  $\Omega_1$  es el coeficiente de frecuencia fundamental de la viga rigidizada y  $\Omega_{01}$  es el coeficiente de frecuencia fundamental de la viga patrón, es decir, de la viga uniforme de material homogéneo (acero) con parámetro de esbeltez  $S_{01} = 100$ . Y  $\Delta m$  es la variación de la masa de la viga rigidizada con respecto a la viga patrón.

$$\Delta m = \frac{\rho_{01} b_{01} h_{01} \int_0^{L_1} f_{\rho 1}(\bar{x}) f_{b 1}(\bar{x}) f_{h 1}(\bar{x}) d\bar{x} + \rho_{02} b_{02} h_{02} \int_0^{L_2} f_{\rho 2}(\bar{x}) f_{b 2}(\bar{x}) f_{h 2}(\bar{x}) d\bar{x}}{\rho_{Ac} b_{01} h_{01} L}. \quad (10.4)$$

En las Tablas 10.10, 10.11 y 10.12, se exponen los valores de  $\Delta m$  determinados para los casos A, B y C, respectivamente, con respecto a la viga patrón. Los mismos permiten, luego, determinar los correspondientes factores de eficiencia  $\eta$  (Ec. (10.3)) para cada caso.

$\frac{L_1}{L}$	$h_2 / h_1$										
	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
3/4	0.763	0.775	0.800	0.825	0.850	0.875	0.900	0.925	0.950	0.975	1.00
2/3	0.683	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.00
1/2	0.525	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	1.00
1/3	0.367	0.400	0.467	0.533	0.600	0.667	0.733	0.800	0.867	0.933	1.00
1/4	0.288	0.325	0.400	0.475	0.550	0.625	0.700	0.775	0.850	0.925	1.00

Tabla 10.10: Relaciones de masas  $\Delta m$  para el caso A con respecto a la viga patrón.  $S_{01} = 100$ .

$\frac{L_1}{L}$	$h_2 / h_1$										
	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
3/4	0.532	0.544	0.569	0.594	0.619	0.644	0.669	0.694	0.719	0.744	0.769
2/3	0.465	0.481	0.515	0.548	0.581	0.615	0.648	0.681	0.715	0.748	0.781
1/2	0.340	0.365	0.415	0.465	0.515	0.565	0.615	0.665	0.715	0.765	0.815
1/3	0.230	0.263	0.330	0.397	0.463	0.530	0.597	0.663	0.730	0.797	0.863
1/4	0.180	0.217	0.292	0.367	0.442	0.517	0.592	0.667	0.742	0.817	0.892

Tabla 10.11: Relaciones de masas  $\Delta m$  para el caso B con respecto a la viga patrón.  $S_{01} = 100$ .

$\frac{L_1}{L}$	$h_2 / h_1$										
	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
3/4	0.497	0.509	0.534	0.558	0.583	0.608	0.632	0.657	0.682	0.706	0.777
2/3	0.428	0.444	0.476	0.509	0.541	0.574	0.606	0.638	0.671	0.703	0.777
1/2	0.308	0.332	0.378	0.425	0.472	0.519	0.566	0.613	0.660	0.707	0.777
1/3	0.208	0.238	0.297	0.356	0.416	0.475	0.535	0.594	0.653	0.713	0.777
1/4	0.163	0.195	0.260	0.325	0.389	0.454	0.518	0.583	0.648	0.712	0.777

Tabla 10.12: Relaciones de masas  $\Delta m$  para el caso C con respecto a la viga patrón.  $S_{01} = 100$ .

Puede notarse en los gráficos de  $\eta$ , que para relaciones de alturas  $h_2 / h_1 \geq 0.3$ , todos los modelos planteados son más eficientes que la viga original e inclusive, en el caso C (Figura 10.11), mejoran la rigidización que brinda la viga AFG de sección constante. En el caso A (Figura 10.9), la mejor eficiencia se observa para  $L_1/L = 2/3$ , mientras que los casos B (Figura 10.10) y C (Figura 10.11) son para  $L_1/L = 3/4$ .

En general, se evidencia que para cada relación  $L_1/L$  existe una relación  $h_2/h_1$  que optimiza al factor de eficiencia de rigidización  $\eta$ ; dicha relación de alturas crece a medida que la relación de longitudes decrece. Este comportamiento se asocia a que la viga es una ménsula, por lo que la reducción de la altura en la sección transversal y consecuentemente de la masa tiene lugar en la posición más alejada del empotramiento, donde para el modo fundamental la energía cinética es mayor. En consecuencia, la optimización de la rigidización dinámica de la viga dependerá de la elección adecuada de las relaciones ( $L_1/L$  y  $h_2/h_1$ ) y, además, del tipo de vinculación que posea.

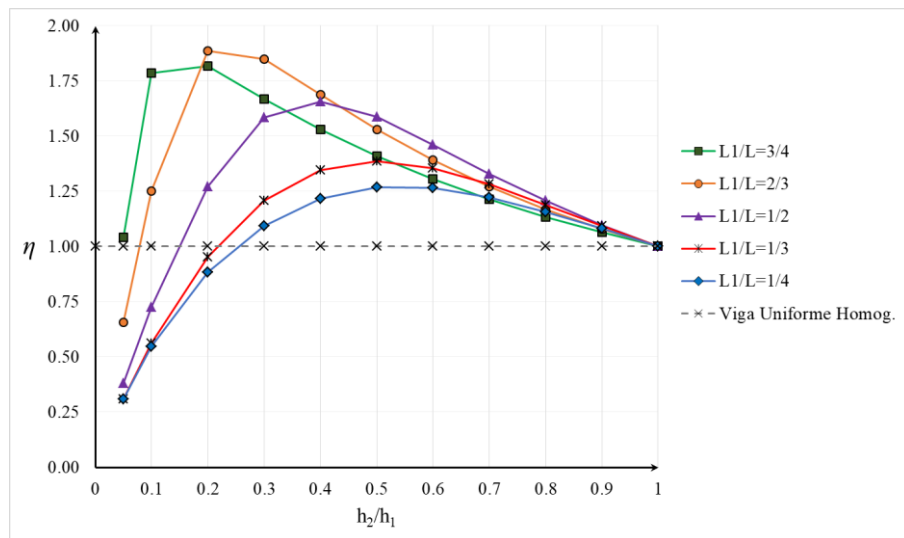


Figura 10.9: Eficiencia en rigidización Caso A. Viga cantiléver homogénea de dos tramos uniformes.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

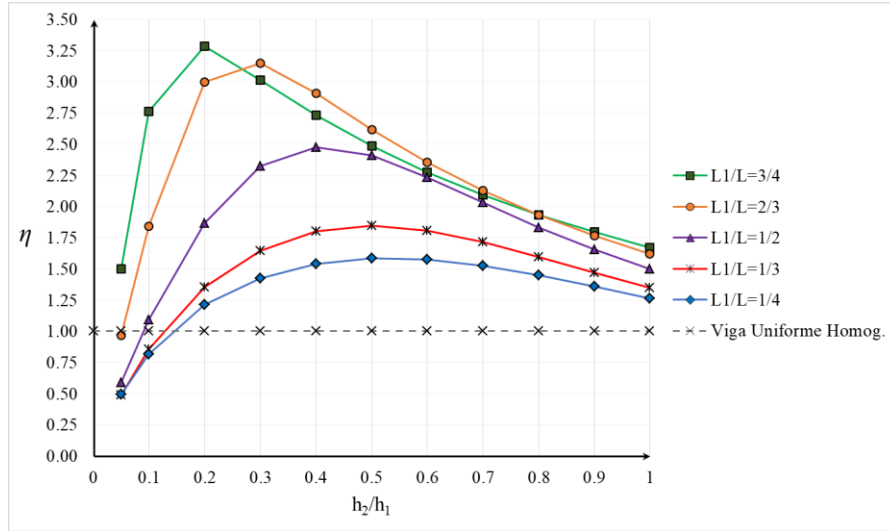


Figura 10.10: Eficiencia en rigidización Caso B. Viga cantiléver de dos tramos de sección constante. Primer tramo AFG (Alum: 01-Ac: 11) y segundo tramo de acero (Ac).  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

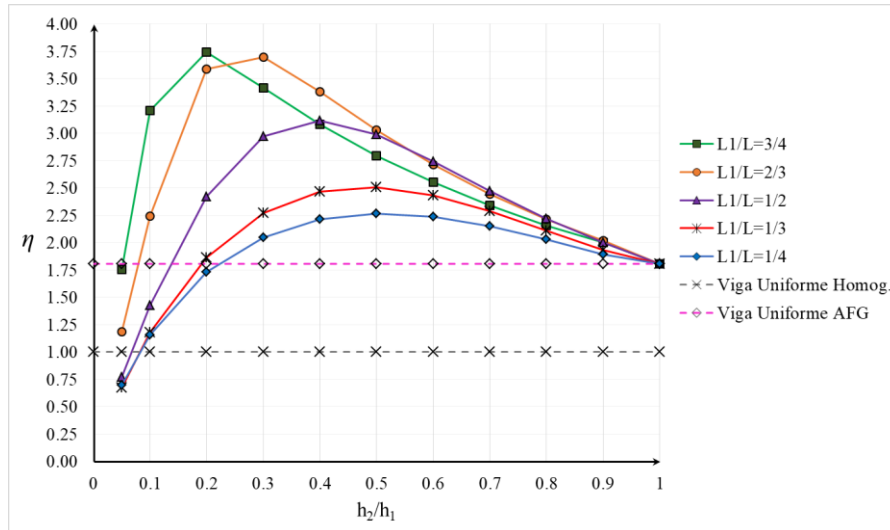


Figura 10.11: Eficiencia en rigidización Caso C. Viga cantiléver AFG (Alum: 01-Ac: 12) con dos tramos de sección constante.  $S_{01} = 100$  y  $S_{02}$  : variable.

#### 10.4.2.2 Viga en voladizo ahusada de un tramo

Finalmente, se estudia el caso de una viga en voladizo AFG (Alum-Ac) de un tramo, con sección transversal ahusada (variando el ancho  $b$  y la altura  $h$ ). Las leyes de variación siguen la ley axial asimétrica definida con  $n_1 = 1$  en la Ec. (9.2). Los demás parámetros que caracterizan a la viga son  $S_{01} = 100$  y  $\kappa = 5/6$ , por ser rectangular y maciza.

En las Tablas 10.13 a 10.17, se exponen los primeros 5 coeficientes de frecuencia para distintas de relaciones de ancho  $b$  y altura  $h$ . Se observa una excelente correspondencia en los resultados obtenidos, cuya precisión se logra de introducir,  $N_p = 20$  términos de polinomios en R-Ritz,  $N_1 = 31$  nodos en GDQM, y  $n_{el} = 3000$  elementos en FEM.



Analizando los valores de las Tablas 10.13 a 10.17, como primera conclusión se puede decir que todos los coeficientes de frecuencia se incrementan con respecto la viga en voladizo de acero uniforme (Tabla 10.3), poniendo en evidencia la rigidización dinámica.

$\frac{b_{11}}{b_{01}}$	1.0					0.9					Sol.
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
1.0	4.77959	29.8245	82.9215	160.551	261.277	4.93573	30.1220	83.2064	160.833	261.554	R-Ritz
	4.77959	29.8245	82.9215	160.551	261.277	4.93573	30.1220	83.2064	160.833	261.554	GDQM
	4.77959	29.8245	82.9215	160.551	261.277	4.93574	30.1220	83.2064	160.833	261.554	FEM
0.9	4.82799	28.8135	79.1514	152.931	248.912	4.98362	29.1004	79.4316	153.210	249.188	R-Ritz
	4.82799	28.8135	79.1514	152.931	248.912	4.98362	29.1004	79.4316	153.210	249.188	GDQM
	4.82800	28.8135	79.1514	152.931	248.912	4.98361	29.1004	79.4316	153.210	249.188	FEM
0.8	4.88453	27.7697	75.2691	145.050	236.059	5.03961	28.0457	75.5439	145.325	236.333	R-Ritz
	4.88453	27.7697	75.2691	145.050	236.059	5.03961	28.0457	75.5439	145.325	236.333	GDQM
	4.88453	27.7697	75.2691	145.050	236.059	5.03960	28.0457	75.5439	145.325	236.333	FEM
0.7	4.95169	26.6887	71.2569	136.867	222.648	5.10619	26.9536	71.5258	137.139	222.919	R-Ritz
	4.95169	26.6887	71.2569	136.867	222.648	5.10619	26.9536	71.5258	137.139	222.919	GDQM
	4.95168	26.6887	71.2569	136.867	222.648	5.10619	26.9536	71.5258	137.139	222.919	FEM
0.6	5.03312	25.5650	67.0917	128.332	208.586	5.18703	25.8185	67.3540	128.599	208.853	R-Ritz
	5.03312	25.5650	67.0917	128.332	208.586	5.18703	25.8185	67.3540	128.599	208.853	GDQM
	5.03312	25.5650	67.0917	128.332	208.586	5.18702	25.8185	67.3540	128.599	208.853	FEM
0.5	5.13452	24.3920	62.7414	119.368	193.737	5.28785	24.6338	62.9961	119.629	194.000	R-Ritz
	5.13452	24.3920	62.7414	119.368	193.737	5.28785	24.6338	62.9961	119.629	194.000	GDQM
	5.13452	24.3920	62.7414	119.368	193.737	5.28784	24.6338	62.9962	119.629	194.000	FEM
0.4	5.26541	23.1621	58.1595	109.864	177.900	5.41818	23.3916	58.4055	110.119	178.158	R-Ritz
	5.26541	23.1621	58.1595	109.864	177.900	5.41818	23.3916	58.4055	110.119	178.158	GDQM
	5.26541	23.1621	58.1595	109.864	177.901	5.41818	23.3916	58.4056	110.119	178.158	FEM
0.3	5.44308	21.8681	53.2748	99.6428	160.748	5.59546	22.0847	53.5107	99.8884	160.998	R-Ritz
	5.44308	21.8681	53.2748	99.6428	160.748	5.59546	22.0847	53.5107	99.8884	160.998	GDQM
	5.44309	21.8681	53.2748	99.6429	160.748	5.59545	22.0847	53.5107	99.8884	160.998	FEM
0.2	5.70360	20.5136	47.9715	88.3811	141.668	5.85601	20.7162	48.1948	88.6155	141.908	R-Ritz
	5.70360	20.5136	47.9715	88.3811	141.668	5.85601	20.7161	48.1948	88.6152	141.907	GDQM
	5.70359	20.5136	47.9716	88.3814	141.668	5.85600	20.7162	48.1948	88.6155	141.908	FEM
0.1	6.14017	19.1839	42.0670	75.3923	119.251	6.29408	19.3706	42.2732	75.6099	119.475	R-Ritz
	6.14017	19.1839	42.0669	75.3922	119.250	6.29408	19.3706	42.2732	75.6097	119.474	GDQM
	6.14017	19.1839	42.0670	75.3923	119.251	6.29409	19.3706	42.2732	75.6099	119.475	FEM

Tabla 10.13: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac) ahusada de un tramo.  $S_{01} = 100$ .

$\frac{b_{11}}{b_{01}}$	0.8					0.7					Sol.
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
1.0	5.11525	30.4578	83.5305	161.155	261.870	5.32460	30.8427	83.9067	161.529	262.239	R-Ritz
	5.11525	30.4578	83.5305	161.155	261.870	5.32460	30.8427	83.9067	161.529	262.239	GDQM
	5.11524	30.4578	83.5305	161.155	261.870	5.32460	30.8427	83.9067	161.529	262.239	FEM
0.9	5.16255	29.4242	79.7497	153.528	249.501	5.37125	29.7956	80.1182	153.896	249.866	R-Ritz
	5.16255	29.4242	79.7497	153.528	249.501	5.37125	29.7956	80.1182	153.896	249.866	GDQM
	5.16252	29.4242	79.7497	153.528	249.501	5.37124	29.7956	80.1182	153.896	249.866	FEM
0.8	5.21793	28.3574	75.8554	145.638	236.643	5.42594	28.7149	76.2157	146.000	237.003	R-Ritz
	5.21793	28.3574	75.8554	145.638	236.643	5.42594	28.7149	76.2157	146.000	237.003	GDQM
	5.21794	28.3574	75.8554	145.638	236.643	5.42593	28.7149	76.2157	146.000	237.003	FEM
0.7	5.28387	27.2528	71.8302	137.447	223.226	5.49115	27.5961	72.1815	137.802	223.580	R-Ritz
	5.28387	27.2528	71.8302	137.447	223.226	5.49115	27.5961	72.1815	137.802	223.580	GDQM
	5.28387	27.2528	71.8302	137.447	223.226	5.49114	27.5961	72.1815	137.802	223.580	FEM
0.6	5.36403	26.1049	67.6505	128.900	209.155	5.57054	26.4337	67.9921	129.248	209.503	R-Ritz
	5.36403	26.1049	67.6505	128.900	209.155	5.57054	26.4337	67.9921	129.248	209.503	GDQM
	5.36403	26.1049	67.6505	128.900	209.155	5.57054	26.4337	67.9921	129.248	209.503	FEM
0.5	5.46416	24.9070	63.2838	119.924	194.296	5.66989	25.2207	63.6146	120.262	194.636	R-Ritz
	5.46416	24.9070	63.2838	119.924	194.296	5.66989	25.2207	63.6146	120.262	194.636	GDQM
	5.46417	24.9070	63.2838	119.924	194.296	5.66989	25.2207	63.6146	120.262	194.636	FEM
0.4	5.59385	23.6511	58.6831	110.405	178.447	5.79880	23.9491	59.0017	110.733	178.778	R-Ritz
	5.59385	23.6511	58.6831	110.405	178.447	5.79880	23.9491	59.0017	110.733	178.778	GDQM
	5.59386	23.6511	58.6831	110.405	178.447	5.79879	23.9491	59.0017	110.733	178.778	FEM
0.3	5.77060	22.3296	53.7764	100.164	161.278	5.97489	22.6112	54.0811	100.480	161.598	R-Ritz
	5.77060	22.3296	53.7764	100.164	161.278	5.97489	22.6112	54.0811	100.480	161.598	GDQM
	5.77061	22.3297	53.7764	100.164	161.278	5.97488	22.6112	54.0811	100.480	161.598	FEM
0.2	6.03106	20.9455	48.4462	88.8780	142.176	6.23509	21.2094	48.7342	89.1785	142.483	R-Ritz
	6.03106	20.9455	48.4461	88.8780	142.176	6.23508	21.2094	48.7342	89.1782	142.482	GDQM
	6.03107	20.9455	48.4462	88.8783	142.176	6.23508	21.2094	48.7342	89.1785	142.483	FEM
0.1	6.47052	19.5825	42.5057	75.8541	119.725	6.67571	19.8269	42.7721	76.1330	120.011	R-Ritz
	6.47052	19.5825	42.5056	75.8539	119.725	6.67571	19.8269	42.7721	76.1329	120.011	GDQM
	6.47051	19.5825	42.5057	75.8541	119.726	6.67571	19.8269	42.7722	76.1330	120.011	FEM

Tabla 10.14: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac) ahusada.  $S_{01} = 100$ .

$\frac{b_{11}}{b_{01}}$	0.6					0.5					Sol.
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
1.0	5.57304	31.2932	84.3552	161.979	262.684	5.87443	31.8352	84.9094	162.541	263.244	R-Ritz
	5.57304	31.2932	84.3552	161.979	262.684	5.87443	31.8352	84.9094	162.541	263.244	GDQM
	5.57304	31.2932	84.3552	161.979	262.684	5.87444	31.8352	84.9094	162.541	263.244	FEM
0.9	5.61898	30.2302	80.5566	154.338	250.304	5.91959	30.7534	81.0967	154.887	250.853	R-Ritz
	5.61898	30.2302	80.5566	154.338	250.304	5.91959	30.7534	81.0967	154.887	250.853	GDQM
	5.61898	30.2302	80.5566	154.338	250.304	5.91959	30.7534	81.0967	154.887	250.853	FEM
0.8	5.67290	29.1334	76.6433	146.433	237.433	5.97267	29.6374	77.1686	146.969	237.970	R-Ritz
	5.67290	29.1334	76.6433	146.433	237.433	5.97267	29.6374	77.1686	146.969	237.970	GDQM
	5.67290	29.1334	76.6433	146.433	237.433	5.97268	29.6374	77.1686	146.969	237.970	FEM
0.7	5.73729	27.9981	72.5975	138.225	224.002	6.03615	28.4825	73.1073	138.747	224.526	R-Ritz
	5.73729	27.9981	72.5975	138.225	224.002	6.03615	28.4825	73.1073	138.747	224.526	GDQM
	5.73729	27.9981	72.5975	138.225	224.002	6.03614	28.4825	73.1073	138.747	224.526	FEM
0.6	5.81582	26.8188	68.3955	129.660	209.916	6.11371	27.2829	68.8886	130.166	210.425	R-Ritz
	5.81582	26.8188	68.3955	129.660	209.916	6.11371	27.2829	68.8886	130.166	210.425	GDQM
	5.81581	26.8188	68.3955	129.660	209.916	6.11371	27.2829	68.8886	130.166	210.425	FEM
0.5	5.91425	25.5884	64.0044	120.662	195.039	6.21112	26.0316	64.4794	121.152	195.533	R-Ritz
	5.91425	25.5884	64.0044	120.662	195.039	6.21112	26.0316	64.4794	121.152	195.533	GDQM
	5.91426	25.5884	64.0044	120.662	195.039	6.21112	26.0316	64.4794	121.152	195.533	FEM
0.4	6.04225	24.2986	59.3765	111.119	179.169	6.33804	24.7202	59.8317	111.591	179.646	R-Ritz
	6.04225	24.2986	59.3765	111.119	179.169	6.33804	24.7202	59.8317	111.591	179.646	GDQM
	6.04225	24.2986	59.3765	111.120	179.169	6.33804	24.7202	59.8317	111.591	179.646	FEM
0.3	6.21750	22.9416	54.4387	100.851	161.974	6.51226	23.3404	54.8720	101.301	162.431	R-Ritz
	6.21750	22.9416	54.4387	100.851	161.974	6.51226	23.3404	54.8720	101.301	162.431	GDQM
	6.21750	22.9416	54.4387	100.851	161.974	6.51225	23.3404	54.8720	101.301	162.431	FEM
0.2	6.47720	21.5194	49.0718	89.5299	142.840	6.77113	21.8941	49.4798	89.9549	143.273	R-Ritz
	6.47720	21.5194	49.0717	89.5296	142.840	6.77113	21.8941	49.4797	89.9546	143.273	GDQM
	6.47720	21.5194	49.0718	89.5299	142.841	6.77114	21.8941	49.4798	89.9549	143.274	FEM
0.1	6.91863	20.1147	43.0844	76.4590	120.345	7.21274	20.4634	43.4617	76.8521	120.747	R-Ritz
	6.91863	20.1146	43.0844	76.4588	120.344	7.21274	20.4634	43.4616	76.8519	120.746	GDQM
	6.91863	20.1147	43.0844	76.4590	120.345	7.21273	20.4634	43.4617	76.8521	120.747	FEM

Tabla 10.15: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac) ahusada.  $S_{01} = 100$ .

$\frac{b_{11}}{b_{01}}$	0.4					0.3					Sol.
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
1.0	6.25055	32.5138	85.6291	163.284	263.992	6.73807	33.4155	86.6354	164.349	265.081	R-Ritz
	6.25055	32.5138	85.6291	163.284	263.992	6.73807	33.4155	86.6354	164.349	265.081	GDQM
	6.25053	32.5138	85.6291	163.284	263.992	6.73807	33.4155	86.6354	164.349	265.081	FEM
0.9	6.29489	31.4088	81.7960	155.610	251.581	6.78167	32.2803	82.7706	156.642	252.637	R-Ritz
	6.29489	31.4088	81.7960	155.610	251.581	6.78167	32.2803	82.7706	156.642	252.637	GDQM
	6.29488	31.4088	81.7960	155.610	251.581	6.78167	32.2803	82.7706	156.642	252.637	FEM
0.8	6.34709	30.2690	77.8467	147.671	238.679	6.83305	31.1096	78.7882	148.668	239.699	R-Ritz
	6.34709	30.2690	77.8467	147.671	238.679	6.83305	31.1096	78.7882	148.668	239.699	GDQM
	6.34709	30.2690	77.8467	147.671	238.679	6.83306	31.1096	78.7882	148.668	239.699	FEM
0.7	6.40961	29.0897	73.7629	139.427	225.214	6.89469	29.8985	74.6699	140.387	226.198	R-Ritz
	6.40961	29.0897	73.7629	139.427	225.214	6.89469	29.8985	74.6699	140.387	226.198	GDQM
	6.40961	29.0897	73.7629	139.427	225.214	6.89468	29.8985	74.6699	140.387	226.198	FEM
0.6	6.48614	27.8651	69.5205	130.823	211.091	6.97023	28.6412	70.3914	131.745	212.035	R-Ritz
	6.48614	27.8651	69.5205	130.823	211.091	6.97023	28.6412	70.3914	131.745	212.035	GDQM
	6.48614	27.8651	69.5205	130.823	211.091	6.97022	28.6412	70.3914	131.745	212.036	FEM
0.5	6.58243	26.5879	65.0861	121.784	196.174	7.06540	27.3302	65.9186	122.664	197.077	R-Ritz
	6.58243	26.5879	65.0861	121.784	196.174	7.06540	27.3302	65.9186	122.664	197.077	GDQM
	6.58242	26.5879	65.0861	121.784	196.174	7.06541	27.3302	65.9186	122.664	197.077	FEM
0.4	6.70814	25.2496	60.4112	112.195	180.260	7.18985	25.9568	61.2029	113.032	181.119	R-Ritz
	6.70814	25.2496	60.4112	112.195	180.260	7.18985	25.9568	61.2029	113.032	181.119	GDQM
	6.70815	25.2496	60.4112	112.195	180.260	7.18985	25.9568	61.2029	113.032	181.119	FEM
0.3	6.88107	23.8418	55.4216	101.874	163.016	7.36126	24.5124	56.1691	102.663	163.825	R-Ritz
	6.88107	23.8418	55.4216	101.874	163.016	7.36126	24.5124	56.1691	102.663	163.825	GDQM
	6.88105	23.8418	55.4216	101.874	163.016	7.36127	24.5124	56.1691	102.663	163.825	FEM
0.2	7.13867	22.3659	49.9957	90.4938	143.824	7.61695	22.9981	50.6946	91.2290	144.578	R-Ritz
	7.13867	22.3658	49.9956	90.4935	143.823	7.61695	22.9981	50.6945	91.2287	144.577	GDQM
	7.13868	22.3659	49.9957	90.4938	143.824	7.61694	22.9981	50.6946	91.2291	144.578	FEM
0.1	7.57937	20.9038	43.9379	77.3484	121.254	8.05473	21.4962	44.5815	78.0212	121.943	R-Ritz
	7.57937	20.9038	43.9379	77.3483	121.253	8.05473	21.4962	44.5815	78.0210	121.943	GDQM
	7.57939	20.9038	43.9379	77.3485	121.254	8.05473	21.4962	44.5816	78.0212	121.943	FEM

Tabla 10.16: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG Alum-Ac) ahusada.  $S_{01} = 100$ .

$\frac{b_{11}}{b_{01}}$	0.2					0.1					Sol.
$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
1.0	7.40467	34.7340	88.2207	166.091	266.906	8.39234	37.0166	91.3447	169.766	270.932	R-Ritz
	7.40467	34.7340	88.2207	166.091	266.906	8.39234	37.0166	91.3447	169.766	270.932	GDQM
	7.40466	34.7340	88.2207	166.091	266.906	8.39235	37.0166	91.3447	169.766	270.932	FEM
0.9	7.44789	33.5565	84.3009	158.321	254.395	8.43647	35.7731	87.3117	161.851	258.257	R-Ritz
	7.44789	33.5565	84.3009	158.321	254.395	8.43647	35.7731	87.3117	161.851	258.257	GDQM
	7.44788	33.5565	84.3009	158.321	254.395	8.43647	35.7731	87.3117	161.851	258.257	FEM
0.8	7.49886	32.3423	80.2616	150.282	241.389	8.48839	34.4911	83.1554	153.661	245.080	R-Ritz
	7.49886	32.3423	80.2616	150.282	241.389	8.48839	34.4911	83.1554	153.661	245.080	GDQM
	7.49885	32.3423	80.2616	150.282	241.389	8.48839	34.4911	83.1554	153.661	245.080	FEM
0.7	7.56001	31.0866	76.0841	141.932	227.814	8.55050	33.1656	78.8565	145.155	231.327	R-Ritz
	7.56001	31.0866	76.0841	141.932	227.814	8.55050	33.1656	78.8565	145.155	231.327	GDQM
	7.56002	31.0866	76.0841	141.932	227.814	8.55051	33.1656	78.8565	145.155	231.327	FEM
0.6	7.63496	29.7832	71.7437	133.218	213.576	8.62637	31.7901	74.3896	136.276	216.901	R-Ritz
	7.63496	29.7832	71.7437	133.218	213.576	8.62637	31.7901	74.3896	136.276	216.901	GDQM
	7.63495	29.7832	71.7437	133.218	213.576	8.62637	31.7901	74.3896	136.277	216.901	FEM
0.5	7.72939	28.4246	67.2060	124.063	198.538	8.72154	30.3569	69.7196	126.948	201.664	R-Ritz
	7.72939	28.4246	67.2060	124.063	198.538	8.72154	30.3569	69.7196	126.948	201.664	GDQM
	7.72939	28.4246	67.2060	124.063	198.538	8.72154	30.3569	69.7196	126.948	201.664	FEM
0.4	7.85282	27.0017	62.4215	114.350	182.493	8.84518	28.8569	64.7958	117.052	185.409	R-Ritz
	7.85282	27.0017	62.4215	114.350	182.493	8.84518	28.8569	64.7958	117.052	185.409	GDQM
	7.85282	27.0017	62.4215	114.350	182.493	8.84518	28.8569	64.7958	117.052	185.409	FEM
0.3	8.02266	25.5058	57.3143	103.895	165.107	9.01393	27.2810	59.5408	106.402	167.796	R-Ritz
	8.02266	25.5058	57.3143	103.895	165.107	9.01393	27.2810	59.5407	106.402	167.795	GDQM
	8.02266	25.5058	57.3143	103.896	165.108	9.01394	27.2810	59.5408	106.402	167.796	FEM
0.2	8.27545	23.9380	51.7602	92.3670	145.758	9.26199	25.6309	53.8288	94.6611	148.198	R-Ritz
	8.27545	23.9379	51.7601	92.3666	145.757	9.26198	25.6308	53.8284	94.6600	148.196	GDQM
	8.27546	23.9380	51.7602	92.3670	145.758	9.26200	25.6309	53.8288	94.6611	148.198	FEM
0.1	8.70623	22.3813	45.5601	79.0527	123.006	9.67573	23.9901	47.4617	81.1133	125.167	R-Ritz
	8.70622	22.3812	45.5600	79.0524	123.006	9.67573	23.9900	47.4616	81.1129	125.167	GDQM
	8.70623	22.3812	45.5601	79.0527	123.006	9.67573	23.9901	47.4617	81.1132	125.167	FEM

Tabla 10.17: Coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver AFG (Alum-Ac) ahusada.  $S_{01} = 100$ .

Las Tablas 10.13 a 10.17 combinan los efectos de la geometría de la viga y la composición del material AFG. El efecto de la geometría emerge claramente: si se toma un valor de ancho  $b$  fijo y se reduce la altura  $h$  desde el extremo empotrado al libre, el coeficiente de frecuencia fundamental incrementa, mientras que los restantes coeficientes disminuyen. En cambio, si se considera un valor de altura  $h$  fijo y se reduce el ancho  $b$  desde el extremo empotrado al libre, todos los coeficientes de frecuencia aumentan.

El crecimiento de la primera frecuencia para ambos casos se explica teniendo en cuenta la forma del primer modo de vibración (sin nodos): la masa inercial se reduce en las zonas de mayor desplazamiento y, en consecuencia, se reduce la energía cinética.

En cuanto a los demás coeficientes de frecuencia, la existencia de nodos en los modos de vibración provoca curvaturas significativas lejos del borde empotrado y el efecto de reducir la altura  $h$  sobre la energía potencial es mayor que el efecto de la reducción del ancho  $b$ .

Para completar el análisis, es que en la [Figura 10.12](#) se grafican los primeros 5 modos de vibración. Se elige como ejemplo representativo el caso en que  $b_{11} / b_{01} = h_{11} / h_{01} = 0.50$ , ya que si bien los demás casos difieren en los valores de los coeficientes, no lo hacen en la forma que se deforma la viga.

Las formas modales se obtienen de graficar los autovectores asociados a los autovalores calculados. Para la teoría de Timoshenko, los mismos contemplan los efectos del desplazamiento y del giro de la sección transversal en cada punto. Para representarlos, se emplean funciones y herramientas del *software Wolfram Mathematica 9.0* sobre el mallado desarrollado para GDQM (ver [Figura 8.3](#)).

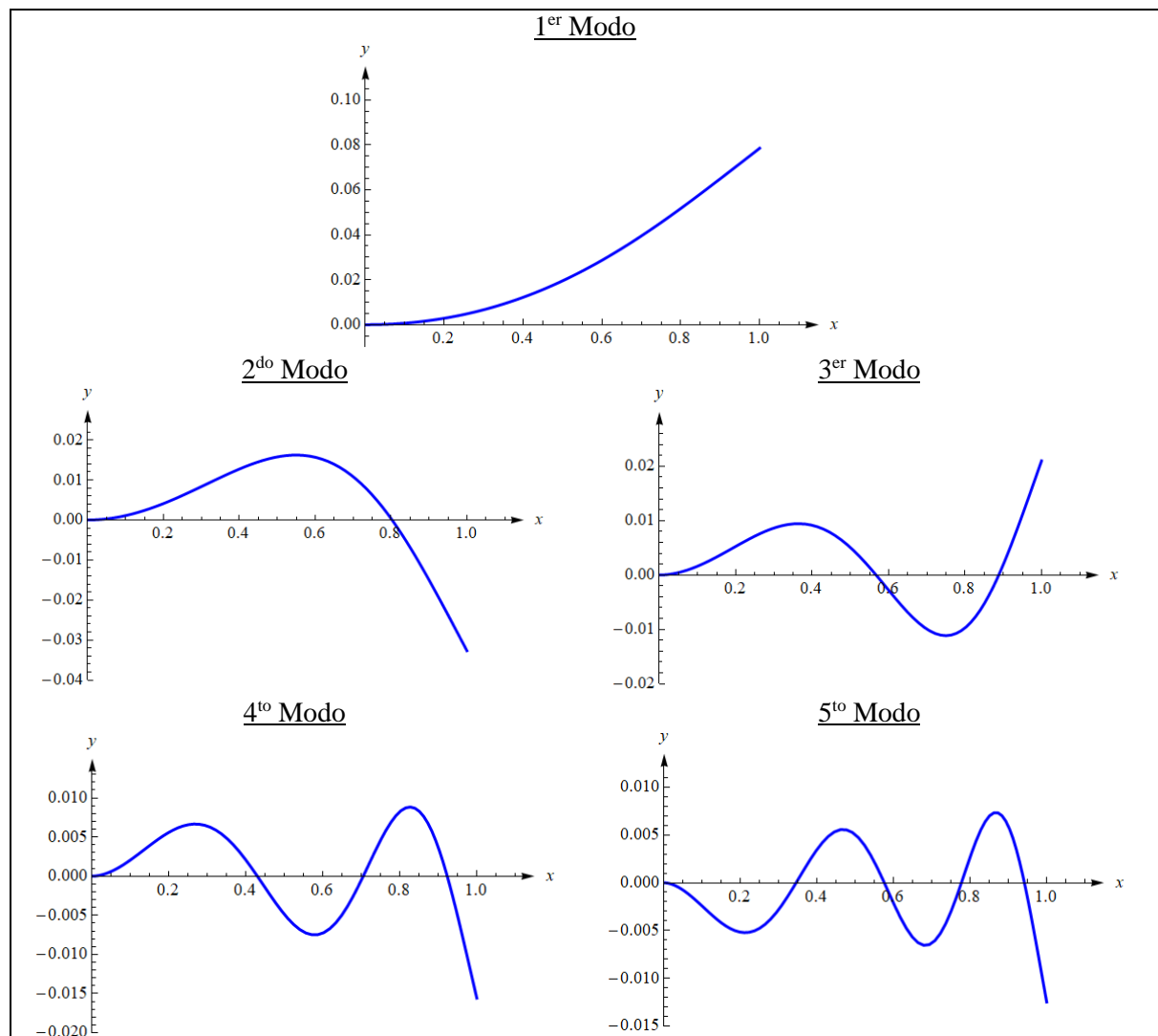


Figura 10.12: Formas modales para la viga cantiléver AFG ahusada.  $S_{01} = 100$ .

Seguidamente, en la [Tabla 10.18](#) se exponen los coeficientes de relación de masas  $\Delta m$  para cada uno de los casos propuestos en las [Tablas 10.13 a 10.17](#), respecto a la viga patrón.

$h_{11} / h_{01}$	$b_{11} / b_{01}$									
	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
1.0	0.754	0.712	0.670	0.628	0.587	0.545	0.503	0.461	0.419	0.378
0.9	0.712	0.673	0.634	0.595	0.557	0.518	0.479	0.440	0.401	0.362
0.8	0.670	0.634	0.598	0.562	0.526	0.491	0.455	0.419	0.383	0.347
0.7	0.628	0.595	0.562	0.529	0.496	0.463	0.430	0.397	0.364	0.331
0.6	0.587	0.557	0.526	0.496	0.466	0.436	0.406	0.376	0.346	0.316
0.5	0.545	0.518	0.491	0.463	0.436	0.409	0.382	0.355	0.327	0.300
0.4	0.503	0.479	0.455	0.430	0.406	0.382	0.358	0.333	0.309	0.285
0.3	0.461	0.440	0.419	0.397	0.376	0.355	0.333	0.312	0.291	0.269
0.2	0.419	0.401	0.383	0.364	0.346	0.327	0.309	0.291	0.272	0.254
0.1	0.378	0.362	0.347	0.331	0.316	0.300	0.285	0.269	0.254	0.238

Tabla 10.18: Relación de masas  $\Delta m$  para la viga cantiléver AFG respecto a la viga patrón.  $S_{01} = 100$ .

$\Delta m$	$h_{11} / h_{01}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	Solución
1.00	1.0	3.51265	21.8889	60.7409	117.516	191.180	M.R-Ritz
		3.51265	21.8889	60.7409	117.516	191.180	GDQM
		3.51265	21.8889	60.7409	117.516	191.180	FEM
0.95	0.9	3.55543	21.2093	58.1451	112.243	182.600	M.R-Ritz
		3.55543	21.2093	58.1451	112.243	182.600	GDQM
		3.55543	21.2093	58.1451	112.243	182.600	FEM
0.90	0.8	3.60509	20.5080	55.4710	106.786	173.679	M.R-Ritz
		3.60509	20.5080	55.4710	106.786	173.679	GDQM
		3.60509	20.5080	55.4710	106.786	173.679	FEM
0.85	0.7	3.66364	19.7823	52.7066	101.118	164.368	M.R-Ritz
		3.66364	19.7823	52.7066	101.118	164.368	GDQM
		3.66364	19.7823	52.7066	101.118	164.368	FEM
0.80	0.6	3.73404	19.0293	49.8359	95.2020	154.598	M.R-Ritz
		3.73404	19.0293	49.8359	95.2020	154.598	GDQM
		3.73404	19.0293	49.8359	95.2020	154.598	FEM
0.75	0.5	3.82080	18.2455	46.8374	88.9842	144.274	M.R-Ritz
		3.82080	18.2455	46.8374	88.9842	144.274	GDQM
		3.82080	18.2455	46.8374	88.9842	144.274	FEM
0.70	0.4	3.93134	17.4279	43.6802	82.3873	133.252	M.R-Ritz
		3.93134	17.4279	43.6802	82.3873	133.252	GDQM
		3.93134	17.4279	43.6802	82.3873	133.252	FEM
0.65	0.3	4.07879	16.5762	40.3189	75.2879	121.299	M.R-Ritz
		4.07879	16.5762	40.3189	75.2879	121.299	GDQM
		4.07879	16.5762	40.3189	75.2879	121.299	FEM
0.60	0.2	4.28953	15.7036	36.6843	67.4689	107.989	M.R-Ritz
		4.28953	15.7036	36.6843	67.4689	107.989	GDQM
		4.28953	15.7036	36.6843	67.4689	107.989	FEM
0.55	0.1	4.62750	14.8999	32.6931	58.4885	92.3559	M.R-Ritz
		4.62750	14.8999	32.6931	58.4885	92.3559	GDQM
		4.62750	14.8999	32.6931	58.4885	92.3559	FEM

Tabla 10.19: Relación de masas  $\Delta m$  y coeficientes de frecuencia para la viga cantiléver homogénea.  $S_{01} = 100$ .

En la [Tabla 10.19](#), se obtienen los coeficientes de frecuencia y relaciones de masas  $\Delta m$  para la viga de material homogéneo (con  $b = b_{01}$  y altura  $h$  variable).

Para realizar el análisis del factor de eficiencia a la rigidización  $\eta$  (Ec. (10.3)), en la [Figura 10.13](#) se emplean:

- La viga AFG de sección ahusada, con ancho constante  $b = b_{01}$  (en la [Tabla 10.13](#)).
  - La viga homogénea de sección ahusada, con ancho constante  $b = b_{01}$  (en la [Tabla 10.19](#)).
  - Los casos de vigas de sección uniforme de material homogéneo y AFG ([Tabla 10.3](#)).
- Además, son casos particulares de las [Tablas 10.19](#) y [10.13](#), respectivamente.

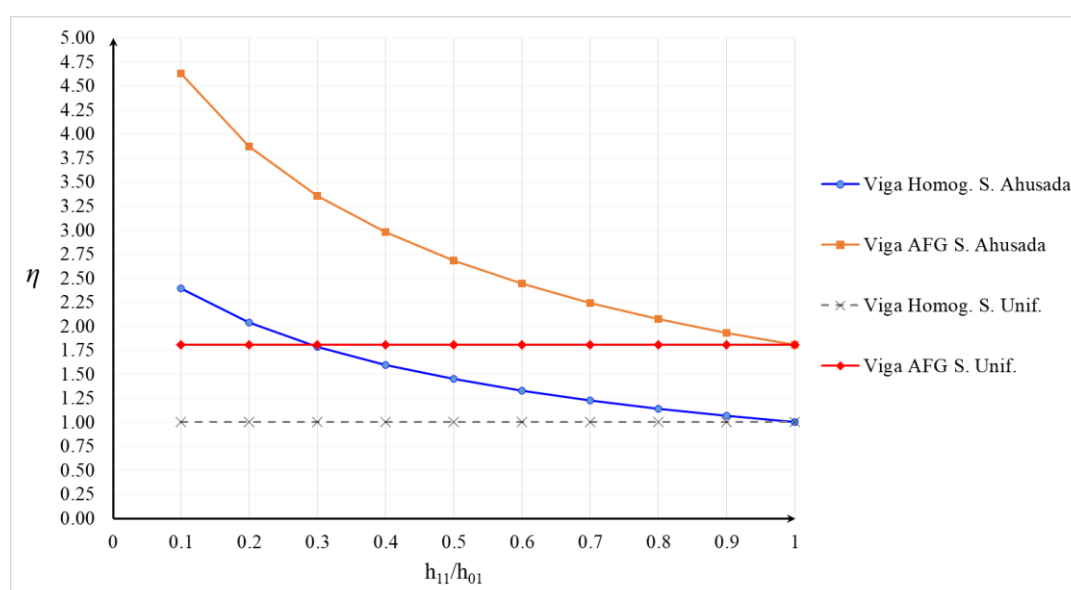


Figura 10.13: Factor de eficiencia de rigidización  $\eta$  vs relación de alturas para vigas cantiléver.  $S_{01} = 100$ .

En la [Figura 10.13](#), se observa que el comportamiento de rigidización aumenta en la medida que la relación de alturas disminuye. Esto era de esperar, debido a que en la [Tabla 10.13](#) (en general para todas las vigas ahusadas estudiadas) se observa que en la medida que la altura  $h$  en la sección final disminuye, el coeficiente fundamental aumenta. Por lo tanto, en la Ec. (10.3) el cociente entre los coeficientes de frecuencia fundamentales será siempre mayor a la unidad. Por otro lado, de la [Tabla 10.18](#) se aprecia que la relación de masas disminuye con la altura. En consecuencia el factor de eficiencia siempre será  $\eta \geq 1$ .

En contraste a las vigas rigidizadas mediante escalón, este caso no presenta un punto de quiebre o de inflexión como se aprecia en las vigas escalonadas (por motivos de cambios en la rigidez y en la masa), [Figuras 10.9](#), [10.10](#) y [10.11](#). La diferencia se aprecia notoriamente en la forma que varían los coeficientes de frecuencia frente a la reducción de la altura  $h$ ; ya que la



relación de masas  $\Delta m$  siempre disminuye. En consecuencia para las vigas escalonadas el factor de eficiencia puede ser  $1 \leq \eta$  ó  $\eta \geq 1$  dependiendo la relación de alturas y especialmente de la relación de longitudes, tal como se estudió anteriormente.

## 10.5 REFERENCIAS

- Bambill, D.V., Rossit, C. A. y Felix, D. H., Free vibrations of stepped axially functionally graded Timoshenko beams. *Meccanica*, 50(4): 1073–1087, 2015.
- Banerjee, J.R., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 247:97–115, 2001.
- Felix, D. H, Rossit, C. A., Maiz, S. y Laura, P. A. A, Experimentos numéricos en rigidización dinámica de elementos estructurales, mediante el método de cuadratura diferencial generalizada. *Mecánica Computacional*, XXV: 1675–1696, 2006.
- Gilardi, G. J., Bambill, D.V., Rossit, C.A., Felix, D. H. y Rattazzi, A.R., Respuesta dinámica de vigas Timoshenko rotantes de materiales con propiedades variando funcionalmente. *Mecánica Computacional*, XXXIII: 1025–1039, 2014.
- Gilardi, G.J., Bambill D.V. y Rossit, C.A., Rigidización dinámica de vigas cantiléver con materiales funcionalmente graduados y sección variable. *Mecánica Computacional*, XXXVI: 215–224, 2018.
- Huang, Y., Yang, L. y Luo, Q. Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section. *Composites: Part B*, 45:1493–1498, 2013.
- Ju, F., Lee H.P. y Lee K.H., On the free vibration of stepped beams. *International Journal of Solids and Structures*, 31(2):3125–3137, 1994.
- Laura, P.A.A., Rossi, R.E., Pombo, J. L. y Pasqua, D., Dynamic stiffening of straight beams of rectangular cross-section: a comparison of finite element predictions and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1):174–178, 1991.
- Laura, P.A.A., Bambill, D.V., Rossit, C. A. y La Malfa S., Comments on “increasing the natural frequencies of circular disks using internal channels”. *Journal of Sound and Vibration*, 240(5):955–956, 2001.
- Mao, Q., Free vibration analysis of multiple-stepped beams by using Adomian decomposition method. *Mathematical and Computer Modelling*, 54: 756–764, 2011.
- Rossit, C. A., Maiz, S. y González, V. Y., Comportamiento dinámico de vigas de sección variable con masas adosadas. *Mecánica Computacional*, XXVI: 334–352, 2007.

- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Subramanian, G. y Balasubramanian, T. S. Beneficial effects of steps on the free vibration characteristics of beams. *Journal of Sound and Vibration*, 118(3): 545–560, 1987.
- Subramanian, G. y Balasubramanian, T. S. Effect of steps on the free vibration characteristics of short beams. *Journal of Aerospace Sciences and Technologies*, 41(1):71–74, 1989.
- Tong, X., Tabarrok, B. y Yeh, K.Y., Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 186(5):710–724, 1995.
- Torabi, K., Afshari, H., Najafi, H., Vibration Analysis of Multi-Step Bernoulli-Euler and Timoshenko Beams Carrying Concentrated Masses. *Journal of Solid Mechanics*, 5(4), 336–349, 2013.
- Yeh, K.Y., Tong, X. y Ji, Z.Y., General analytic solution of dynamic response of beams with non-homogeneity and variable cross section. *Applied Mathematics and Mechanics*, 13:779–791, 1992.
- Yuan, J. y Dickinson, S.M., On the use of artificial springs in the study of the free vibrations of systems comprised of straight and curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153(2): 203–216, 1992.
- Zhao, Y., Huang, Y. y Guo, M. A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory. *Composite Structure*, 168:277–284, 2017.

# **CAPÍTULO 11**

## **CONCLUSIONES**

## 11.1 CONCLUSIONES GENERALES

En la presente tesis han quedado demostradas las ventajas estructurales de utilizar materiales AFG en el diseño de vigas, de uno y dos tramos.

La muy buena correlación de los resultados obtenidos, tanto para los valores comparados con la literatura como para los modelos propuestos, permiten dar certezas de que los métodos aproximados de Rayleigh-Ritz, cuadratura diferencial generalizada (GDQM) y elementos finitos (FEM), son herramientas de gran precisión y eficiencia para la resolución de esta clase de problemas (problemas de elastodinámica de singular complejidad analítica).

Para obtener los resultados numéricos se construyeron algoritmos de resolución utilizando el *software Wolfram Mathematica 9.0*. El mismo permite obtener un cálculo de los coeficientes de frecuencia rápidamente y con muy buena convergencia.

## 11.2 CONCLUSIONES DE LOS RESULTADOS

Desde el punto de vista de la optimización estructural, se han encontrado composiciones de materiales AFG que mejoran la rigidización dinámica lograda por la variación de la sección transversal (de forma escalonada o ahusada), en las vigas; ya sea en ausencia o presencia de masas adosadas a la misma.

Las composiciones se seleccionan en función de las vinculaciones a las que la viga se encuentre sometida. Por tal motivo es que se utilizan distribuciones axiales, asimétricas y simétricas.

Los estudios realizados permitieron obtener las siguientes conclusiones:

1) En las vigas AFG cantiléver de sección constante con características del material axial asimétricas (estudiadas en el capítulo 2), la composición a) Ac-Alum optimiza la rigidización dinámica frente a la composición b) Alum-Ac, cuando el exponente  $n$  es menor a la unidad ( $n < 1$  en la Ec. (2.12)), tenga o no una masa adosada la viga en su extremo libre. En cambio, la composición b) optimiza la rigidización frente a la composición a) cuando las propiedades del material AFG varían con  $n > 1$ . Cuando  $n = 1$ , es un caso especial, ya que la composición a) permite incrementar levemente (frente a la composición b)) todos los coeficientes de frecuencia cuando la viga no tiene masa adosa. Pero, cuando se adosa la masa, el coeficiente de frecuencia fundamental aumenta más para la composición b) y los restantes disminuyen en comparación a la composición a).

2) En los casos de vigas AFG con características simétricas, tanto en variación de las propiedades del material (Ec. (6.35)), la geometría y vinculación (simplemente apoyada y

biempotrada), estudiadas en el capítulo 6; se evidencia que la composición c) Ac-Alum-Ac optimiza la rigidización haya o no masa adosada a la viga, frente a la composición d) Alum-Ac-Alum. Esto se debe a que la alúmina, más rígida y más liviana que el acero, predomina en las zonas de la viga con mayor curvatura (mayor momento flector) y desplazamiento (Figura 2.4). Por lo cual, la rigidez de este material aumenta la energía de deformación y su reducido peso disminuye el efecto inercial; en consecuencia, los coeficientes de frecuencia naturales aumentan.

3) En el análisis de la viga AFG Empotrada-Apoyada (sin masa adosada), capítulo 6, se compara el efecto de rigidización de las 4 composiciones (a), b), c) y d) citadas anteriormente. Debido a que las zonas de mayor curvatura y mayor desplazamiento convergen alrededor de la zona central de la viga (Figura 2.4), hacen pensar que la mejor zona para colocar la alúmina es esa. Esto se verifica en la Tabla 6.4, al considerar una ley de distribución simétrica. De hecho, la composición c) Ac-Alum-Ac, con ley de variación simétrica (Ec. (6.35)), es la que brinda la mayor rigidización obtenida (en comparación a las otras 3 composiciones citadas). Por otra parte, la composición d) Alum-Ac-Alum es la que logra la peor rigidización de las analizadas.

En cuanto al análisis de las leyes de variación asimétricas (Ec. (6.34)), las conclusiones que se obtienen son análogas a las explicadas para la viga Empotrada-Libre (sin masa adosada). Es decir, la mayor rigidización de la viga se produce para la composición a) Ac-Alum cuando  $n = 0.5$  y en la composición b) Alum-Ac cuando  $n = 2$ . Cuando la variación de las propiedades es lineal ( $n = 1$  en la Ec. (6.33)) los resultados son muy similares entre las composiciones a) y b), aunque se distingue una leve pero mayor rigidización en la composición a) para el mismo peso.

Las composición c) Ac-Alum-Ac junto con composiciones a) Ac-Alum con  $n = 0.5$  y b) Alum-Ac con  $n = 2$  (Ec. (6.33)), generan igualmente la mayor reducción del peso de la viga.

4) El efecto dinámico que tiene adosar una o varias masas a la viga, evidencia ser la disminución de los coeficientes de frecuencia naturales (de la viga sin masa), en todos los casos calculados. Cuanto mayor sea la magnitud de la masa adosada, mayor será la disminución de los coeficientes. Esto se justifica en que la masa aporta energía cinética al sistema y por ende en el balance energético genera que los coeficientes bajen.

Para los casos de viga cantiléver modelados en el capítulo 3 y 7, se aprecia que adosar una masa en el extremo libre tiene mayor efecto en la disminución de las frecuencias que si se adosan 5 masas, de igual magnitud a la primera, distribuidas en la longitud  $L$  de la viga. Esto se fundamenta en que cuando una masa (de igual magnitud) está adosada en la zona de mayores

desplazamientos, su energía cinética siempre será mayor respecto de otra posición. Lo que es de destacar, es que su efecto en la disminución sigue siendo mayor a pesar de que en la otra situación se adosan 5 masas.

5) En el capítulo 7, se evidencia que en la medida que la esbeltez de la viga aumenta, los valores de los coeficientes de frecuencia calculados con la teoría de Timoshenko tienden a los valores obtenidos usando la teoría Bernoulli-Euler. Es importante señalar que esta tendencia es válida para variaciones suaves de la sección transversal. Ya que para relaciones de estrechamiento grandes ( $(h_L / h_0)$  que se aproximan a 0), el modelo se aleja más de la teoría clásica de la resistencia de los materiales y la tendencia deja de ser uniforme.

Se evidencia la influencia de la teoría Timoshenko, considerar los efectos de deformación por corte y de la inercia rotatoria combinados, para los valores de los coeficientes de frecuencia en vigas de baja esbeltez.

Las frecuencias naturales de vibración que brinda la teoría de vigas de Timoshenko son más bajas en relación a la teoría de Bernoulli-Euler. Esto se justifica en que, al considerar el efecto de corte, mecanismos adicionales de la deformación efectiva hacen que la viga se vuelva más flexible (disminuya su rigidez), aumentando la deflexión y disminuyendo las frecuencias.

En cuanto a los casos analizados se observa que, para los tres primeros coeficientes de frecuencia, la influencia de considerar la teoría de Timoshenko es mayor en las vigas con 5 masas, para todas las composiciones de materiales. Sin embargo, para el cuarto y quinto coeficiente, la influencia es mayor en vigas que poseen una masa adosada en el extremo libre.

En términos de la composición, se puede decir que la influencia del uso de la teoría de Timoshenko en general es similar para los dos casos de material AFG estudiados y para la viga de composición homogénea. Solo en el caso de la viga con 5 masas y para el quinto coeficiente de frecuencia, la influencia de la teoría de Timoshenko es mayor para los dos casos con materiales AFG que para la viga homogénea.

6) Los resultados obtenidos indican que las variaciones en la composición del material AFG tienen un impacto uniforme en la modificación de los coeficientes de frecuencia naturales de la viga, es decir, todos aumentan (en referencia a la viga de material homogéneo). En cambio, al variar la sección transversal de la viga, el coeficiente de frecuencia fundamental aumenta y las demás disminuyen. Esto lleva a la conclusión de que el uso de estos materiales es un medio confiable cuando es necesario aumentar los valores de las frecuencias naturales.

7) Las restantes conclusiones no se omitieron si no que pueden encontrarse desarrolladas en los respectivos capítulos, con los gráficos y tablas correspondientes que permiten dar una mejor

entendimiento.

### 11.3 CONCLUSIONES SOBRE LOS MÉTODOS APROXIMADOS

La complejidad de los casos estudiados, puso en evidencia el comportamiento de los métodos aproximados, propuestos para el análisis. En general, se puede decir que para el método de Rayleigh-Ritz se obtienen soluciones muy buenas empleando  $N_p = 20$  términos de polinomios. Este valor combina, ingenierilmente hablando, una buena relación: tiempo computacional - precisión numérica. Debido a que en la modelación adoptada, se utilizaron funciones continuas para todo dominio; para los casos en que se quisieron modelar discontinuidades en escalón, tanto en las propiedades como en la geometría, hubo que recurrir a emplear más términos de polinomios para mejorar la precisión de los resultados.

La precisión en los resultados de GDQM se obtuvo de emplear en la mayoría de los casos  $N = 23$  nodos (por tramo en consideración). El método respondió muy bien a las exigencias de las modelaciones propuestas. Aparecieron, como se menciona en el capítulo 4 (Figura 4.3), problemas de convergencia cuando la altura se hizo variar con  $n = 0.5$  (Ec. (4.30)). Las dificultades se originaron cuando la relación de alturas se hizo tender a uniforme ( $h_1 / h_0 \rightarrow 1$ ), en las cercanías del empotramiento, de la viga cantiléver estudiada.

En cuanto a FEM, el número de elementos requerido para obtener las mismas precisiones que R-Ritz y GDQM fue variable. Dado a que depende de las complejidades del modelo. No solo influye la forma en que varían la sección transversal y las propiedades del material, sino que también depende de la esbeltez de la viga. En general, se requirió usar un rango de elementos de ( $7 \leq n_e \leq 930$ ) para EB2N, ( $50 \leq n_e \leq 1600$ ) para EB3N y ( $200 \leq n_e \leq 6000$ ) para el elemento Timoshenko de 2 nodos.

Por otro lado, si bien FEM requiere un gran número de elementos y demanda mucho tiempo computacional, frente a los otros dos métodos. Aún así, logra representar las singularidades de la geometría y del material mejor que el método de Rayleigh-Ritz (cuando se utilizan funciones continuas para todo dominio).

#### 11.3.1 Método Rayleigh-Ritz

El conocido método Rayleigh-Ritz proporciona un procedimiento preciso y conveniente para abordar el problema de las vigas AFG. Es un método sencillo de aplicar y tiene grandes facilidades para incorporar singularidades, dado a que solo se suman los términos correspondientes a las energías de deformación y cinética máximas de la viga. La energía de la

masa adosada a la cinética de la viga y la de los vínculos elásticos a la de deformación.

➤ **Características del método:**

1) La solución es aproximada y las funciones aproximantes se establecen para todo el dominio de definición del problema. Dichas funciones deben satisfacer las condiciones de borde esenciales, no siendo necesario que satisfagan las condiciones de borde naturales. Aunque si las cumplen, la convergencia mejora. Generalmente se utilizan polinomios, pero también se pueden emplear funciones trigonométricas.

2) La convergencia depende del tipo de funciones admisibles que se adopten para aproximar la amplitud del desplazamiento, en el caso de la teoría de Bernoulli-Euler; y en el caso de la teoría de Timoshenko, además, para la amplitud del giro.

3) Su principal inconveniente radica en que no siempre es fácil encontrar funciones adecuadas para todo el dominio de definición, y que al mismo tiempo satisfagan las condiciones de borde geométricas del problema.

➤ **Comparación de la modelación para las teorías desarrolladas:**

En el caso de la viga Bernoulli-Euler, se pudieron encontrar polinomios para satisfacer las 4 borde condiciones de simultáneamente (casos estudiados en el capítulo 6). Sin embargo, para la teoría de Timoshenko esto no es una tarea sencilla, al tener 2 variables. En el caso particular de la viga AFG Timoshenko con vinculación elástica, se emplearon polinomios completos de segundo grado (Ec. (9.26)). Cuyos valores de los coeficientes homogéneos, se determinaron de cumplir simultáneamente las condiciones de borde elásticas dadas en la Ec. (9.1).

### 11.3.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada

El método de cuadratura diferencial generalizada (GDQM) proporciona una solución aproximada, muy precisa. Es un método muy recomendable para abordar el problema de las vibraciones libres en vigas AFG. En comparación a los otros dos métodos, presenta más dificultades para la programación. Cualquier singularidad impuesta en el dominio obliga a generar nuevos tramos.

➤ **Características del método:**

1) Como características atractivas tiene: su rápida convergencia, alta precisión y eficiencia computacional. La posibilidad de transformar una ecuación diferencial en un grupo de ecuaciones lineales compuestas por coeficientes de peso y una función definida para el dominio del elemento que se evalúa, representa una gran ventaja ya que evita recalcular el problema por



completo si se varían las condiciones de borde.

2) La convergencia es descendente, es decir, a medida que se incrementa el número de nodos, los valores de los autovalores disminuyen hasta converger a la solución.

3) Tiene dificultades para representar cambios de distribuciones bruscos. Es decir, por ejemplo, cuando la derivada de una función cambia repentinamente de signo en un punto.

➤ **Comparación de la modelación para las teorías desarrolladas:**

1) Para el caso de la viga Timoshenko cada nodo posee 2 GL a los cuales se les pueden plantear las dos variables (desplazamiento y giro). Entonces, si se arma un mallado con  $N$  nodos, para las condiciones de borde se utilizan dos nodos únicamente (1 y  $N$ ). En el caso de la viga Bernoulli-Euler se requieren dos nodos en cada extremo (1, 2 y  $N-1$ ,  $N$ ), ya que en esta teoría los nodos poseen 1 GL, que se asigna al desplazamiento.

2) Cuadratura diferencial resuelve mejor cuando menor sea el orden de la derivada mayor. Para la viga Bernoulli-Euler debe resolver una ecuación diferencial de cuarto orden mientras que para la viga Timoshenko un sistema de ecuaciones de segundo orden. De aquí que la cantidad de nodos a emplear sea mayor para la primera.

3) En cuando a la cantidad de nodos necesarios para obtener las primeras 5 frecuencias, la viga Bernoulli-Euler requiere 5 nodos interiores y la viga Timoshenko con solo 3 ya obtiene 6 coeficientes de frecuencia.

4) La teoría de vigas de Timoshenko permite modelar la inercia rotacional de la masa adosada a la viga, mediante el procedimiento desarrollado, ya que se le asignan a cada variable un grado de libertad y no intervienen los coeficientes de peso. En el caso de la teoría de Bernoulli-Euler, el giro se representa con la derivada del desplazamiento, con lo cual trae una dificultad. La misma es que se no puede despejarse el vector  $\{V_b\}$  de la Ec. (4.6). por estar el coeficiente de frecuencia asociado a la condición de borde y multiplicado por los coeficientes de peso de orden (1). Sin embargo, se puede obtener una solución resolviendo el determinante de la ecuación característica e igualándola a cero (Ec. (4.6)). Las soluciones son buenas para los primeros 2 coeficientes y se pueden implementar hasta  $N=13$  nodos, porque luego la solución se inestabiliza numéricamente.

### 11.3.3 Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos (FEM), constituye uno de los métodos más implementados hoy en día. Para las vigas AFG modeladas, proporciona una solución aproximada muy buena. Como desventaja, requiere un gran costo computacional, porque los mallados deben ser

bastante densos para representar las variaciones del material punto a punto.

Numéricamente se probó que el método puede tener convergencia tipo fluctuante. Es decir que al aumentar el número de elementos, los valores de los autovalores pueden estar por encima y por de bajado del valor buscado, hasta que finalmente converge.

➤ **Características del método:**

- 1) Se obtienen matrices de rigidez **K** y de masa **M** tipo banda simétrica.
- 2) El proceso de ensamblaje es de fácil implementación para la resolución en computadora.
- 3) Los vínculos (condiciones de borde esenciales del modelo continuo) se aplican una vez realizado el ensamblaje, restringiendo los grados de libertad correspondientes.
- 4) Resulta sencillo introducir masas puntuales y vínculos elásticos (resortes lineales). Para ello, en el modelo discreto se deben prever nodos en los puntos de aplicación. El valor de la constante de rigidez elástica de un resorte se suma a la respectiva componente en la diagonal principal de la matriz de rigidez. Y análogamente, el valor de una masa puntual simplemente se suma a la respectiva componente de la diagonal principal en la matriz de masa.
- 5) Aumentando el número de elementos finitos, excepcionalmente se producen matrices numéricamente mal condicionadas.

➤ **Comparación de la modelación para las teorías desarrolladas:**

- 1) Pudo demostrarse para la viga Bernoulli-Euler, que el elemento EB3N requiere de menos elementos para aproximar la solución en relación al elemento EB2N. Al contar EB3N con 2 GL (por el nodo del centro) más que EB2N, permite tener más flexibilidad ante leyes de distribuciones no lineales; y consecuentemente emplear menos elementos.
- 2) La ventaja que tiene el elemento Timoshenko adoptado para el análisis, es que no aparece temido problema de bloqueo por corte. Esto puede verse en la publicación de [Rossi \(2007\)](#).

## 11.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Los conocimientos brindados, en la presente tesis, a cerca de las vibraciones transversales libres en vigas AFG conforman una base sólida para las futuras líneas de investigación.

Se pretende en los estudios postdoctorales extender y profundizar los conocimientos adquiridos en dominios unidimensionales (vigas AFG). Perfeccionar los algoritmos desarrollados de manera de evaluar el efecto de complejidades adicionales a los casos estudiados: vibración forzada, efectos de segundo orden, acoplamiento entre vibración transversal e inestabilidad, etc.

Posteriormente, en dominios bidimensionales, determinar propiedades dinámicas de

membranas y placas constituidas por materiales funcionalmente graduados, con diversas geometrías y condiciones de contorno desarrollando algoritmos específicos de cálculo.

### ❖ Antecedentes y situación actual

#### Vigas y Marcos planos AFG

[Shahba y Rajasekaran \(2012\)](#) estudiaron las vibraciones libres longitudinales y transversales así como el pandeo de vigas Euler-Bernoulli AFG mediante los métodos: del elemento de transformación diferencial (DTEM) y del elemento de cuadratura diferencial de bajo orden (DQEL). [Shahba et al. \(2011\)](#) estudiaron las vibraciones libres y pandeo de vigas AFG Timoshenko utilizando el método de elementos finitos. [Gan et al. \(2017\)](#) investigaron el post-pandeo de vigas y marcos planos AFG por el método de elementos finitos.

#### Placas con FGM

Basados en la teoría clásica de placas con las condiciones cinemáticas de Von Karman, [Woo et al. \(2006\)](#) adoptaron un desarrollo en series para estudiar grandes deformaciones de placas FGM con distintas condiciones de borde. [Allahverdizadeh et al. \(2008\)](#) desarrollaron una solución semi-analítica para el análisis dinámico libre y forzado de placas circulares delgadas FGM. [Baferani et al. \(2011\)](#) estudiaron analíticamente por un procedimiento tipo Navier-Levy las vibraciones de placas FGM con distintas condiciones de borde.

[Yuda y Xiaoguang \(2011\)](#) estudiaron la dinámica y estabilidad de placas FGM con excitación en su plano. [Yin et al. \(2013\)](#) llevaron a cabo el análisis isogeométrico de la vibración libre de placas FGM con B-spline no uniforme y el concepto de superficie neutra física. [Chakraverty y Pradhan \(2014a\)](#) estudiaron el comportamiento dinámico de placas FGM de variación exponencial en sus propiedades mecánicas sobre fundación elástica y luego extendieron el estudio teniendo en cuenta efectos térmicos ([Chakraverty y Pradhan, 2014b](#)).

[Ruan y Wang \(2014\)](#) estudiaron la estabilidad y vibración transversal de placas FGM y [Li et al. \(2014\)](#) utilizaron la teoría clásica de placas y la superficie neutral para estudiar analíticamente la flexión, pandeo y vibración libre de placas FGM delgadas estableciendo relaciones funcionales con las correspondientes a la placa homogénea. [Kumar et al. \(2018\)](#) analizan placas FGM delgadas por el clásico método de la matriz rigidez dinámica.

## 11.5 REFERENCIAS

Allahverdizadeh, A, Naei, M.H. y Bahrami, M.N., Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates. *Journal of Sound and Vibration*, 310(4):966–84, 2008.

- Baferani, A.H., Saidi, A.R. y Jomehzadeh, E., An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 225(3):526–36, 2011.
- Chakraverty, S. y Pradhan, K.K., Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh-Ritz method. *International Journal of Applied Mechanics*, 6(4):1450043, 1-37, 2014a.
- Chakraverty, S. y Pradhan, K.K., Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. *Aerospace Science and Technology*, 36:132–56, 2014b.
- Gan, B.S., Huong, T.T. y Kien, N.D., Post-buckling behavior of axially FGM planar beams and frames. *Procedia Engineering*, 171:147–158, 2017.
- Kumar, S., Ranjan, V. y Jana, P., Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method. *Composite Structures*, 197:39–53, 2018.
- Li, S.R., Wang, X. y Batra, R.C., Correspondence relations between deflection, buckling load, and frequencies of thin functionally graded material plates and those of corresponding homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, 82(11):111006, 2015.
- Rossi, R.E. *Introducción al análisis de Vibraciones con el Métodos de Elementos Finitos*. Edi UNS, 124–133, 2007.
- Ruan, M., y Wang, Z.M., Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material. *Journal of Vibration and Control*, 22(16):3504–17, 2016.
- Shahba, A. y Rajasekaran, S., Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*, 36: 3094–3111, 2012.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M.T. y Hajilar, S., “Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites Part B*, 42:801–808, 2011.
- Woo, J., Meguid, S.A. y Ong, L.S., Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *Journal of Sound and Vibration*, 289(3):595–611, 2006.
- Yuda, H. y Xiaoguang, Z., Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate. *Journal Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 39(3):367–77, 2011.
- Yin, S., Yu, T. y Liu, P., Free vibration analyses of FGM thin plates by isogeometric analysis based on classical plate theory and physical neutral surface. *Advances in Mechanical Engineering*, (5):634–584, 2013.

# ANEXOS

## ANEXO 1

### A1 VIBRACIÓN TRANSVERSAL LIBRE DE VIGAS AFG

En el capítulo 1, se presentó el procedimiento analítico que permite obtener las ecuaciones gobernantes para el problema de la viga vibrante, para las teorías de Bernoulli-Euler (Ec. (1.6)) y Timoshenko (Ecs. (1.10) y (1.12)). Para tal caso, se utilizó como modelo una viga prismática de sección transversal constante y constituida por material homogéneo (por ser el más simple). La realidad es que el problema puede generalizarse incorporando la variación de los parámetros geométricos y de las propiedades del material (AFG) constitutivo.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de la viga vibrante AFG Bernoulli-Euler se introducen en el capítulo 4, en la Ec. (4.14). Por otro lado, el sistema de ecuaciones gobernantes para la viga AFG Timoshenko, se presenta en el capítulo 8 (Ecs. (8.11) y (8.12)).

Seguidamente, se introducen las respectivas condiciones de borde y de continuidad, para ambas teorías, que serán de utilidad para el entendimiento del desarrollo de la tesis.

Las condiciones de borde se implementan indistintamente de si la viga posee uno o dos tramos. Hay que tener en consideración y la precaución, de ingresar las propiedades del material que compone a la sección transversal en el extremo correspondiente.

#### A1.1 Vigas AFG Bernoulli-Euler





Caso	Esquema	Condiciones de Borde	
		$x = 0$	$\bar{x} = L$
Empotrado		$\bar{V} = 0$ $\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} = 0$	$\bar{V} = 0$ $\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} = 0$
Simplemente Apoyado		$\bar{V} = 0$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2} = 0$	$\bar{V} = 0$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2} = 0$
Libre		$E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2} = 0$ $\frac{d}{d\bar{x}}\left[E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2}\right] = 0$	$E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2} = 0$ $\frac{d}{d\bar{x}}\left[E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2}\right] = 0$
Guiado		$\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} = 0$ $\frac{d}{d\bar{x}}\left[E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2}\right] = 0$	$\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} = 0$ $\frac{d}{d\bar{x}}\left[E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2}\right] = 0$

Tabla A1.1: Condiciones de borde clásicas para las vigas AFG Bernoulli-Euler.


Caso	Esquema	Condiciones de Borde	
		$x = 0$	$\bar{x} = L$
Masa		$E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2} = -\omega^2 J_m \frac{d\bar{V}}{d\bar{x}}$	$E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2} = \omega^2 J_m \frac{d\bar{V}}{d\bar{x}}$
		$\frac{d}{d\bar{x}} \left[ E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2} \right] = \omega^2 m \bar{V}$	$\frac{d}{d\bar{x}} \left[ E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{x}^2} \right] = -\omega^2 m \bar{V}$

Tabla A1.2: Condición para contemplar una masa puntual adosada en uno de los extremos para las vigas AFG Bernoulli-Euler.

En la [Tabla A1.1](#), se indican las condiciones de borde clásicas para la viga AFG y en la [Tabla A1.2](#), la condición para contemplar una masa puntual adosada en uno de los extremos. Todas las condiciones de borde, se presentan independizadas de la variable temporal  $t$ .

$\bar{V} = \bar{V}(\bar{x})$  es la amplitud de desplazamiento (en la dirección del eje  $\bar{y}$ ),  $\omega$  es la frecuencia circular natural de vibración transversal,  $m$  es una masa puntual adosada y  $J_m = m r_g^2$  su momento de inercia. El parámetro  $r_g$  permite considerar el efecto inercial de la masa adosada a la viga, y el mismo se desarrolla en el capítulo 2 ([Figura 2.3](#)).

En la [Tabla A1.3](#), se indican las condiciones de continuidad para las vigas AFG de dos tramos, sin masa adosada. Todas las condiciones, se presentan independizadas de la variable temporal  $t$ .

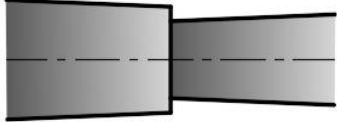
Condiciones de continuidad (sin masa)		
Esquema	$x = x_g$	
	Desplazamientos	$\bar{V}_1 = \bar{V}_2$
	Giros	$\frac{d\bar{V}_1}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{V}_2}{d\bar{x}}$
	Equilibrio de esfuerzos de corte	$\frac{d}{d\bar{x}_1} \left[ E_1(\bar{x}_1)I_1(\bar{x}_1)\frac{d^2\bar{V}_1}{d\bar{x}_1^2} \right] = \frac{d}{d\bar{x}_2} \left[ E_2(\bar{x}_2)I_2(\bar{x}_2)\frac{d^2\bar{V}_2}{d\bar{x}_2^2} \right]$
	Equilibrio de momentos flectores	$E_1(\bar{x}_1)I_1(\bar{x}_1)\frac{d^2\bar{V}_1}{d\bar{x}_1^2} = E_2(\bar{x}_2)I_2(\bar{x}_2)\frac{d^2\bar{V}_2}{d\bar{x}_2^2}$

Tabla A1.3: Condiciones de continuidad para las vigas AFG Bernoulli-Euler de dos tramos.

### A.1.2 Vigas AFG Timoshenko

Para la teoría de Timoshenko, además de las condiciones de borde indicadas en la [Tablas A1.1](#) y [A1.2](#), se consideran a los extremos elásticamente restringidos al desplazamiento y giro. donde  $k_t$  y  $k_r$  son las constantes de los resortes, traslacional y rotacional, respectivamente; y se implementan en el capítulo 9. La [Tabla A1.4](#), presenta a las condiciones de borde Y la [Tabla A1.5](#), las condiciones de continuidad para la viga con y sin masa adosada. Ambas condiciones se presentan independizadas de la variable temporal  $t$ .






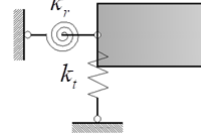
Caso	Esquema	Condiciones de Borde	
		$\bar{x} = 0$	$\bar{x} = L$
Empotrado		$\bar{V} = 0$ $\bar{\Psi} = 0$	$V = 0$ $\Psi = 0$
Simplemente Apoyado		$\bar{V} = 0$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}} = 0$	$\bar{V} = 0$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}} = 0$
Libre		$\kappa G(\bar{x})A(\bar{x})\left[\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}\right] = 0$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}} = 0$	$\kappa G(\bar{x})A(\bar{x})\left[\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}\right] = 0$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}} = 0$
Guiado		$\bar{\Psi} = 0$ $\kappa G(\bar{x})A(\bar{x})\left[\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}\right] = 0$	$\bar{\Psi} = 0$ $\kappa G(\bar{x})A(\bar{x})\left[\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}\right] = 0$
Masa		$\kappa G(\bar{x})A(\bar{x})\left[\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}\right] = -\omega^2 m \bar{V}$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}} = -\omega^2 J_m \bar{\Psi}$	$\kappa G(\bar{x})A(\bar{x})\left[\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}\right] = \omega^2 m \bar{V}$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}} = \omega^2 J_m \bar{\Psi}$
Restricción elástica a la Rotación y Traslación		$\kappa G(\bar{x})A(\bar{x})\left[\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}\right] = k_{tA} \bar{V}$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}} = k_{rA} \bar{\Psi}$	$\kappa G(\bar{x})A(\bar{x})\left[\frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}\right] = -k_{tB} \bar{V}$ $E(\bar{x})I(\bar{x})\frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}} = -k_{rB} \bar{\Psi}$

Tabla A1.4: Condiciones de borde: clásicas, con masa adosada y con vínculos elásticos, para las vigas AFG Timoshenko.

Condiciones de continuidad	
$x = x_s$	
Desplazamientos	$\bar{V}_1 = \bar{V}_2$
Giros	$\bar{\Psi}_1 = \bar{\Psi}_2$
Equilibrio de esfuerzos de corte (sin masa)	$\kappa_1 G_1(\bar{x}_1)A_1(\bar{x}_1)\left[\frac{d\bar{V}_1}{d\bar{x}_1} - \bar{\Psi}_1\right] = \kappa_2 G_2(\bar{x}_2)A_2(\bar{x}_2)\left[\frac{d\bar{V}_2}{d\bar{x}_2} - \bar{\Psi}_2\right]$
Equilibrio de momentos flectores (sin masa)	$E_1(\bar{x}_1)I_1(\bar{x}_1)\frac{d\bar{\Psi}_1}{d\bar{x}_1} = E_2(\bar{x}_2)I_2(\bar{x}_2)\frac{d\bar{\Psi}_2}{d\bar{x}_2}$
Equilibrio de esfuerzos de corte (con masa)	$\kappa_1 G_1(\bar{x}_1)A_1(\bar{x}_1)\left[\frac{d\bar{V}_1}{d\bar{x}_1} - \bar{\Psi}_1\right] = \kappa_2 G_2(\bar{x}_2)A_2(\bar{x}_2)\left[\frac{d\bar{V}_2}{d\bar{x}_2} - \bar{\Psi}_2\right] + \omega^2 m \bar{V}_1$
Equilibrio de momentos flectores (con masa)	$E_1(\bar{x}_1)I_1(\bar{x}_1)\frac{d\bar{\Psi}_1}{d\bar{x}_1} = E_2(\bar{x}_2)I_2(\bar{x}_2)\frac{d\bar{\Psi}_2}{d\bar{x}_2} + \omega^2 J_m \bar{\Psi}_1$

Tabla A1.5: Condiciones de continuidad para las vigas AFG Timoshenko de dos tramos, con y sin masa adosada en la continuidad de los tramos.

$\bar{V} = \bar{V}(\bar{x})$  es la amplitud de desplazamiento (en la dirección del eje  $\bar{y}$ ) y  $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\bar{x})$  la amplitud del giro normal de la sección transversal durante la deformación.

El esquema correspondiente se puede visualizar en el modelo de vigas AFG Timoshenko, desarrollado en el capítulo 8 (Figura 8.1)



## ANEXO 2

### A2 ANÁLISIS DE CONVERGENCIA PARA EL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Para decidir el número de términos de polinomios a emplear en las funciones aproximantes de la Ec. (7.3), se realizó el estudio de convergencia que se detalla a continuación. Se eligió el caso de mayor complejidad de los casos analizados en el capítulo 7. El mismo corresponde a la primera fila de la [Tabla 7.23](#), debido a que: se produce el mayor efecto de corte (por ser la menor relación de esbeltez ( $L/h_0 = 5$ )) la altura de la sección transversal varía en forma cuadrática ( $n = 2$ ) y la viga posee 5 masas adosadas. La [Tabla A2.1](#), presenta los resultados para cantidades de términos en las sumatorias de la Ec. (7.3):

$N_{p,q}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
5	3.53362	15.5960	34.2454	62.0190	97.4123
10	3.53129	15.5170	33.5176	53.8933	74.6629
15	3.53053	15.4876	33.3527	53.3795	73.5660
20	3.53034	15.4729	33.2349	53.0152	72.9484
25	3.53022	15.4690	33.1829	52.6410	72.1216
30	3.53014	15.4651	33.1366	52.5256	71.8635
35	3.53010	15.4601	33.0987	52.4371	71.6952

Tabla A2.1: Convergencia M.R-Ritz. Viga cantiléver AFG ( $n = 2$ ),  $h$  variable con  $n = 2$ . 5 masas. ( $L/h_0 = 5$ ))

El tiempo de cálculo es significativamente mayor para a medida que  $N_{p,q}$  crece por encima de los 20 términos. Por lo tanto, considerando que los resultados son suficientemente indicativos desde el punto de vista de la ingeniería y evaluando el tiempo de procesamiento de datos, se adoptó  $N_p = N_q = 20$  para todos los cálculos de los resultados presentados.